## Aufgabe 1

a) $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ EW von $A$ mit EV $w, \bar{w} \in \mathbb{C}^2$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem (im Komplexen):

$$w \exp(\lambda t); \quad \bar{w} \exp(\bar{\lambda} t)$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem im Reellen:

$$\varphi_1(t) = \operatorname{Re} w e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t \cdot u - \sin\beta t \cdot v)$$

$$\varphi_2(t) = \qquad = \operatorname{Im} w e^{\lambda t}$$

$$= e^{\alpha t}(\sin\beta t \cdot u + \cos\beta t \cdot v)$$

mit $w = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{\alpha t}\Big((c_1 \cos\beta t + c_2 \sin\beta t)\, u + (-c_1 \sin\beta t + c_2 \cos\beta t)\, v\Big)$$

$$y(0) = c_1 u + c_2 v$$

(Da $w, \bar{w}$ über $\mathbb{C}$ lin. unabh. sind, müssen $u, v$ über $\mathbb{R}$ lin. unabh. sein.)

Bis auf lineare Transformation:

o.B.d.A. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d.h. $$y(t) = e^{\alpha t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}}_{\text{"Drehung um Winkel } \beta t\text{"}} \cdot y_0$$

1 Für $\underline{\alpha < 0}$:

$$y(t) \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty) \quad \text{unabh. von } y_0$$

$\Longrightarrow$ $y \equiv 0$ attraktiv (und stabil)

2 Für $\underline{\alpha = 0}$:

$$\|y(t)\| = \|y_0\| \quad \forall t$$

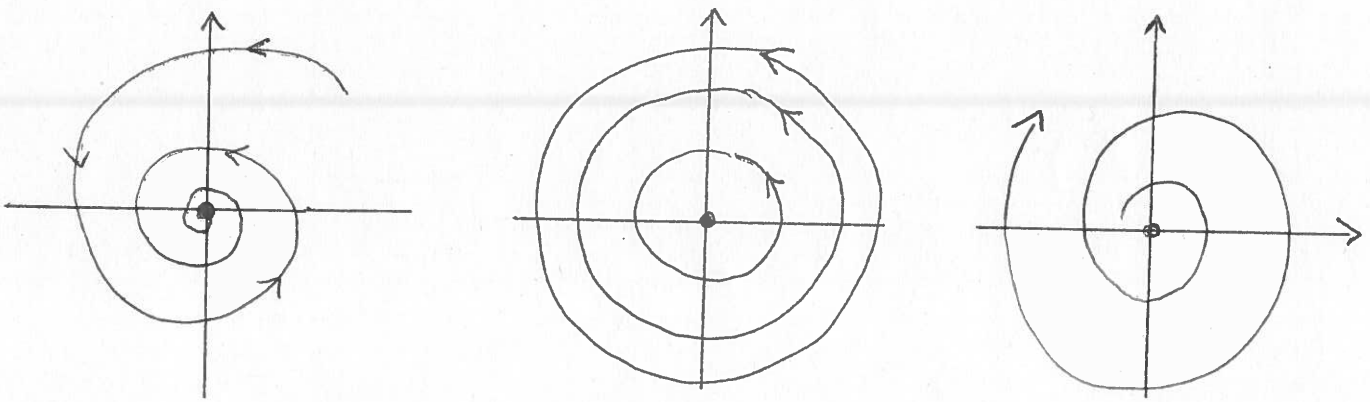
$\Longrightarrow$ $y \equiv 0$ stabil, aber nicht attraktiv
(bleibt auch unter affiner Transf. richtig)

3 Für $\underline{\alpha > 0}$:

$$\|y(t)\| \longrightarrow \infty \quad (t \to \infty) \quad \text{solange } y_0 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $y \equiv 0$ weder stabil noch attraktiv

"Typisches Verhalten"



$\alpha < 0,\ \beta > 0$ $\qquad$ $\alpha = 0,\ \beta > 0$ $\qquad$ $\alpha > 0,\ \beta > 0$

($\beta < 0$: Drehung im Uhrzeigersinn ...)

Bemerkung

Bsp. für DGL mit attraktiver, aber nicht stabiler Nullösung siehe Amann, "Gewöhnliche Differentialgleichungen" (1983), S. 221 (Bem. 15.1)

1b) – BONUSAUFGABE –

Einsetzen der Polarkoordinaten in die DGL führt auf

$$\dot{r} = r(1-r^2), \qquad \dot{\varphi} = 1,$$

d.h. $\varphi(t) = t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

$\rightarrow$ Analysiere die Lösungen von $\dot{r} = r(1-r^2)$:

- $r(0) = 1$ führt auf konstante Lsg. $r \equiv 1$.
  $r(0) = 0$ —"— $r \equiv 0$
- Sei $r(0) = r_0 < 1$. Solange $r < 1$ gilt $\dot{r} > 0$, d.h. können $r \geq r_0$ annehmen.

Für $r \geq r_0$ gilt:

$$r' = r(1-r^2) = (1+r)r \cdot (1-r)$$
$$\geq \underbrace{(1+r_0)r_0}_{=:\rho} \cdot (1-r)$$

Vergleichssatz liefert: $r(t) \geq w(t)$

mit $\dot{w} = \rho(1-w), \quad w(0) = r_0.$

Es gilt: $w(t) = 1 - \underbrace{c_1}_{>0} \exp(-\rho t) \to 1 \quad (t \to \infty)$,

also insb. $r(t) \nearrow 1 \quad (t \to \infty)$.

Dass $r(\hat{t}) > 1$ oder $r(\hat{t}) = 1$ für ein $\hat{t} > 0$ ausgeschlossen werden kann und folglich $r(t) < 1$ gelten muss, folgt aus der Eindeutigkeit der konstanten Lösung $r \equiv 1$.

- Für $r_0 > 1$ analoges Vorgehen:

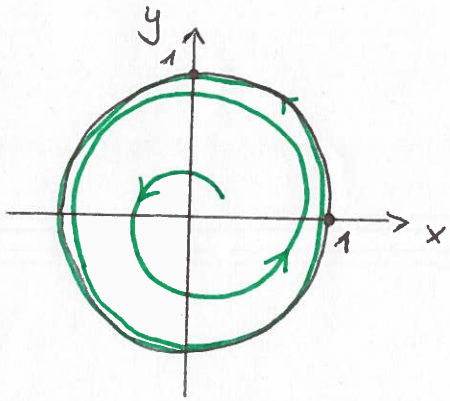
  $r(0) = r_0 > 1$. Solange $r > 1$ gilt $\dot{r} < 0$, d.h. können $r \leq r_0$ annehmen.

  Dort gilt: $\dot{r} \leq r_0(1+r_0)(1-r)$

  Vergleichssatz: $r(t) \leq 1 + c_2 \exp(-pt)$, $c_2 > 0$,

  also $r(t) \downarrow 1$ $(t \to \infty)$.

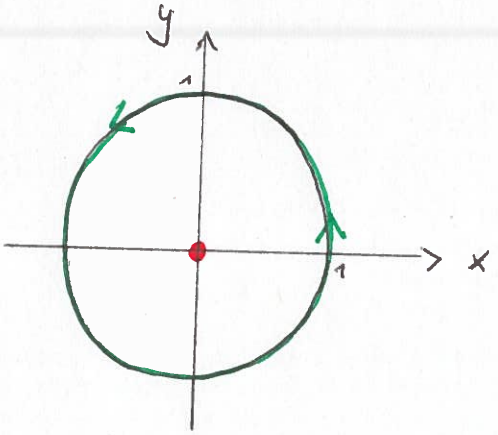
- <u>4 Fälle:</u>




$0 < r < 1$,

d.h. $0 < \|(x_0, y_0)\| < 1$

(spiralförmiges Annähern an Einheitskreis von innen)

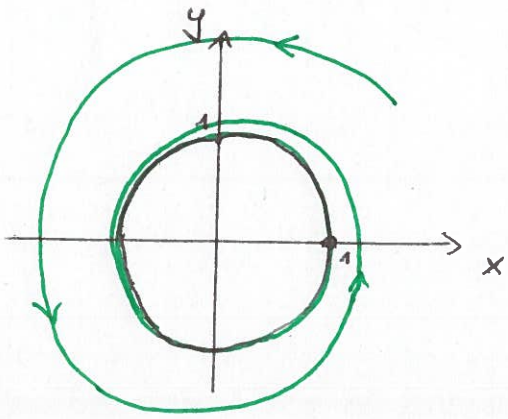



$r = 0$ $(\|(x_0, y_0)\| = 0)$

$\to$ konstante Lösung

$r = 1$ $(\|(x_0, y_0)\| = 1)$

$\to$ periodische Lösung auf Einheitskreis




$r > 1$, d.h. $\|(x_0, y_0)\| > 1$

$\to$ spiralförmiges Annähern an Einheitskreis von außen