Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 12

Abgabe am – keine Abgabe! –

Dieses letzte *klausurrelevante* Übungsblatt wird zur selbstständigen Bearbeitung empfohlen. Lösungsskizzen werden in der Woche 8.-12. Juli auf der Webseite der Vorlesung bereitgestellt.

Aufgabe 1.

Es sei $P : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Bézier-Kurve vom Grad n mit den Bézier-Punkten $P_0, ..., P_n \in \mathbb{R}^d$, d.h. $P(t) := \sum_{i=0}^{n} B_{in}(t)P_i$, wobei B_{in} das i-te Bernstein-Polynom vom Grad n bezeichnet.

a) Beweisen Sie folgende *hilfreiche Formeln* für die erste und zweite Ableitung von P:

(i) $P'(0) = n(P_1 - P_0)$ und $P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$

(ii) $P''(0) = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0)$ und $P''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2})$

b) Zeigen Sie:

$$\int_0^1 P(t)dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} P_k.$$

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung behandelten Eigenschaften der Bernstein-Polynome.

Aufgabe 2.

Die beiden Geradenstücke $\{(t,0) \in \mathbb{R}^2 : t \leq 0\}$ und $\{(t,1) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 1\}$ (als Kurven parametrisiert wie angegeben) sollen durch eine Kurve $P : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ "möglichst glatt" miteinander verbunden werden.

a) Geben Sie die Bézier-Punkte für eine Bézier-Kurve P möglichst geringen Grades an, sodass die entstehende Gesamtkurve $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist.

Skizzieren Sie die Kurve, indem Sie die Kurve für $t = 0.25, 0.5, 0.75$ mit Hilfe des Algorithmus von Casteljau auswerten.

b) Können Sie auch eine Bézier-Kurve konstruieren, sodass die Gesamtkurve zweimal stetig differenzierbar ist? Falls ja, geben Sie eine solche Kurve (d.h. ihre Bézier-Punkte) mit minimalem Grad an.

Aufgabe 3.
Gegeben sei das Polynom $p(x) = (2x - 1)^3$.

a) Bestimmen Sie die Bézier-Darstellung dieses Polynoms, d.h. die Darstellung von p bezüglich der duch die Bernstein-Polynome gegebenen Basis.

b) Wie lauten folglich die Bézier-Punkte der Kurve $t \mapsto (t, (2t - 1)^3)$, wenn diese Kurve als Bézier-Kurve vom Grad 3 dargestellt werden soll?

Aufgabe 4.
Sei $P : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Bézier-Kurve vom Grad n mit Bézier-Punkten $P_0, ..., P_n$. Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Ist $Q : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Bézier-Kurve vom Grad n mit Bézier-Punkten $Q_0, ..., Q_n$ und gilt $P(t) = Q(t)$ für alle $t \in [0, 1]$, dann folgt bereits $P_i = Q_i$ für $i = 0, ..., n$.

b) Ist $Q : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine Bézier-Kurve vom Grad m mit Bézier-Punkten $Q_0, ..., Q_m$ und gilt $P(t) = Q(t)$ für alle $t \in [0, 1]$, dann folgt bereits $n = m$ und $P_i = Q_i$ für $i = 0, ..., n$.

Aufgabe 5.
Der Viertelkreis mit Radius $r = 1$ um $(0, 0)^T \in \mathbb{R}^2$ soll durch eine Bézier-Kurve vierten Grades angenähert werden. Die Endpunkte der Bézier-Kurve sollen durch die exakten Punkte $(1, 0)^T$ ("Anfang") und $(0, 1)^T$ ("Ende") gegeben sein und in diesen Punkten sollen die Tangenten der Bézier-Kurve dieselbe Richtung wie die Tangenten des Viertelkreises haben. Außerdem soll die Bézier-Kurve ebenso wie der Viertelkreis symmetrisch zur Achse $x_1 = x_2$ sein.
Zusätzlich soll folgende Bedingung erfüllt sein: Seien $Q_0, ..., Q_4$ die Punkte die aus den Bézier-Punkte $P_0, ..., 0_4$ dieser Kurve bei Drehung um 90° vervorgehen und Q die durch $Q_0, ..., Q_4$ definierte Bézier-Kurve. Dann soll P an der "Nahtstelle" $(0, 1)^T = P_4 = Q_0$ zweimal stetig differenzierbar zu Q fortsetzbar sein.
Bestimmen Sie die Punkte $P_0, ..., P_4$. Ist die so entstandene Kurve eine brauchbare Approximation?