Aufgabe 1

Erinnerung: • Ableitung der Bernstein-Polynome vom Grad $n \geq 1$:

$$B'_{in}(t) = \begin{cases} -n\, B_{0,n-1}(t) & i=0 \\ n\left(B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\right) & 1 \leq i \leq n-1 \\ n\, B_{n-1,n-1}(t) & i=n \end{cases}$$

• $$B_{in}(0) = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & i \geq 1 \end{cases}$$

$$B_{in}(1) = \begin{cases} 1 & i=n \\ 0 & i \leq n-1 \end{cases}$$

a) i) $$P'(0) = \sum_{i=0}^{n} B'_{in}(0) \cdot P_i$$

$$= -n \cdot \underbrace{B_{0,n-1}(0)}_{=1} \cdot P_0$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} n\Big(\underbrace{B_{i-1,n-1}(0)}_{\substack{=1 \text{ für } i=0 \\ (\text{sonst } =0)}} - \underbrace{B_{i,n-1}(0)}_{=0}\Big) P_i$$

$$+ n \cdot \underbrace{B_{n-1,n-1}(0)}_{=0} \cdot P_n$$

$$= n \cdot (P_1 - P_0)$$

[analoge Rechnung für $P'(1)$]

ii) $$P''(0) = \sum_{i=0}^{n} B''_{in}(0)\, P_i$$

$$= n\cdot(n-1)\, \overbrace{B_{0,n-2}(0)}^{=1} \cdot P_0$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} n\left(B'_{i-1,n-1}(0) - B'_{i,n-1}(0)\right) P_i$$

$$+ n\cdot(n-1)\, \underbrace{B_{n-2,n-2}(0)}_{=0} \cdot P_n$$

In der Summe verschwinden alle Summanden bis auf diejenigen für $i=1$ und $i=2$ sicherlich.

$i=1$: $$n\left(B'_{0,n-1}(0) - B'_{1,n-1}(0)\right) P_1$$

$$= n\left(-(n-1)\underbrace{B_{0,n-2}(0)}_{=1} - (n-1)\left(\underbrace{B_{0,n-2}(0)}_{=1} - \underbrace{B_{1,n-2}(0)}_{=0}\right)\right) P_1$$

$$= -n(n-1)\cdot 2P_1$$

$i=2$: $$n\left(B'_{1,n-1}(0) - B'_{2,n-1}(0)\right)\cdot P_2$$

$$= n(n-1)\left(\underbrace{B_{0,n-2}(0)}_{=1} - \underbrace{B_{1,n-2}(0)}_{=0} - \underbrace{B_{1,n-2}(0)}_{=0} + \overbrace{B_{2,n-2}(0)}^{=0}\right)\cdot P_2$$

$$= n\cdot(n-1)\, P_2$$

Insgesamt:

$$P''(0) = n\cdot(n-1)\left(P_2 - 2P_1 + P_0\right).$$

[analoge Rechnung für $P''(1)$.]

b) Es gilt

$$\int_0^1 B_{in}(t)\,dt = \binom{n}{i}\int_0^1 t^i(1-t)^{n-i}\,dt$$

$$\overset{\text{partielle Integration}}{=} \binom{n}{i}\left[\frac{1}{i+1}\,t^{i+1}(1-t)^{n-i}\Big|_0^1 + \frac{n-i}{i+1}\int_0^1 t^{i+1}(1-t)^{n-i-1}\,dt\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & (i=n) \\[2ex] \dbinom{n}{i}\dfrac{n-i}{i+1}\displaystyle\int_0^1 t^{i+1}(1-t)^{n-i-1}\,dt = \dbinom{n}{i+1}\int_0^1 t^{i+1}(1-t)^{n-(i+1)}\,dt & (i<n) \end{cases}$$

$$= \int_0^1 B_{i+1,n}(t)\,dt$$

induktiv: $\displaystyle\int B_{i,n}(t)\,dt = \int B_{n,n}(t) = \frac{1}{n+1}$

$$\Longrightarrow \int_0^1 P(t)\,dt = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P_k .$$

Aufgabe 2

a) Es muss aufgrund von $P(0) \overset{!}{=} \binom{0}{0}$, $P(1) \overset{!}{=} \binom{1}{1}$ gelten:

$$P_0 = \binom{0}{0}, \qquad P_n = \binom{1}{1}$$

Für die Ableitungen (stetige Differenzierbarkeit an den "Nahtstellen"!) muss gelten

$$\binom{1}{0} \overset{!}{=} P'(0) = n \cdot (P_1 - P_0)$$
$$\binom{1}{0} \overset{!}{=} P'(1) = n \cdot (P_n - P_{n-1})$$

Es ist unmittelbar klar, dass dies $n=2$ ausschließt. Für $n=3$ gilt:

$$P_1 = \binom{0}{0} + \frac{1}{3} \cdot \binom{1}{0} = \binom{1/3}{0}$$
$$P_2 = \binom{1}{1} - \frac{1}{3} \binom{1}{0} = \binom{2/3}{1}$$

Casteljau-Algorithmus:

$$P_{i0} = P_i, \qquad i = 0, \dots, n$$

$$P_{ik} = (1-t) P_{i,k-1} + t \cdot P_{i+1,k}, \qquad i = 0, \dots, n-k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$P(t) = P_{0,n}$$

z.B. für $t = \frac{1}{2}$:

$$P_{00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{10} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{20} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{30} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

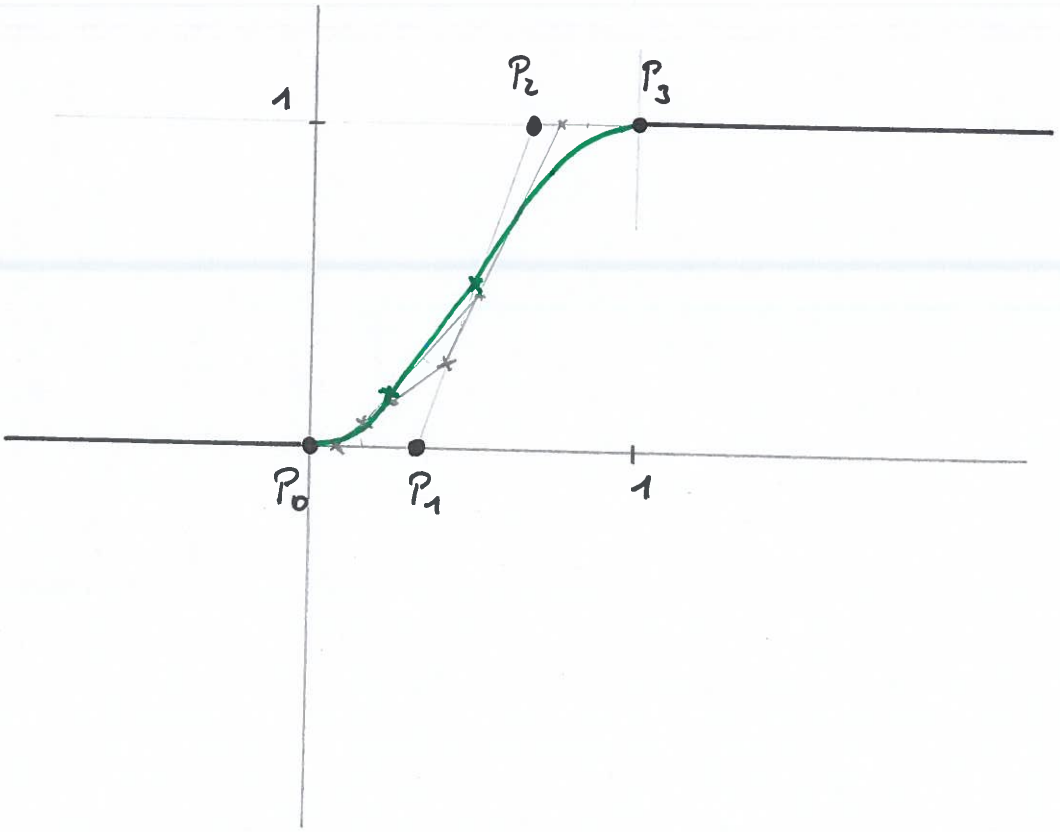
$$P_{01} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_{11} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad P_{21} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{02} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix} \qquad P_{12} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$P_{03} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

d.h. $P(\frac{1}{2}) = P_{03} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

[analoge Rechnung für $t = \frac{1}{4}, 3/4$].



b) Wie zuvor:

$$(*)\begin{cases} P_0 = \binom{0}{0}, & P_n = \binom{1}{1} \\ n(P_1 - P_0) = \binom{1}{0} & n(P_n - P_{n-1}) = \binom{1}{0} \end{cases}$$

Neue Bedingungen:

$$(**)\begin{cases} \binom{0}{0} = P''(0) = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0) \\ \binom{0}{0} = P''(1) = n\cdot(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2}) \end{cases}$$

$n=3$: liefert zu wenig Freiheitsgrade (Die Bedingungen $(*)$ (siehe a)) legen $P_0, \ldots, P_3$ bereits fest und diese Punkte erfüllen die neuen Bedingungen $(**)$ offensichtlich nicht...)

$n=4$: Wie in a) findet man

$$P_0 = \binom{0}{0},\quad P_1 = \binom{1/4}{0},\quad P_3 = \binom{3/4}{1},\quad P_4 = \binom{1}{1}$$

mit Hilfe von $(*)$.

Jedoch ist $(**)$ nicht erfüllbar:

$$P_2 = 2P_1 - P_0 = \binom{1/2}{0}$$

$$P_2 = 2P_3 - P_4 = \binom{1/2}{1} \quad ↯$$

$n=5$: aus $(*)$ folgt:

$$P_0 = \binom{0}{0},\quad P_1 = \binom{1/5}{0},\quad P_5 = \binom{1}{1},\quad P_4 = \binom{4/5}{1}$$

und mit $(**)$:

$$P_2 = 2P_1 - P_0 = \binom{2/5}{0} \qquad P_3 = 2P_4 - P_5 = \binom{3/5}{1}$$

Aufgabe 3

a) 1. Möglichkeit: Bernstein-Polynome ausrechnen und Koeffizientenvergleich ...

2. Möglichkeit:

$$p(x) \overset{!}{=} c_0 B_{03}(x) + c_1 B_{13}(x) + c_2 B_{23}(x) + c_3 B_{33}(x)$$

$$-1 = p(0) = c_0 \quad , \quad 1 = p(1) = c_3$$

Ableitung: $p'(x) = -3c_0 B_{0,2}(x) + 3c_1 (B_{0,2} - B_{1,2})(x)$
$+ 3c_2 (B_{1,2} - B_{2,2})(x)$
$+ 3c_3 B_{22}(x)$

$$6 = p'(0) = 3(c_1 - c_0)$$
$$6 = p'(1) = 3(c_3 - c_2)$$

Insgesamt: $c_0 = -1, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = 1$

d. h. $p = -B_{03} + B_{13} - B_{23} + B_{33}$

b) $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

a) **Richtig.**

Es gilt
$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) P_i = P(t) = Q(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) Q_i .$$
Da die Bernstein-Polynome eine Basis für die Polynome vom Grad $\leq n$ bilden, folgt aus der Eindeutigkeit der Basisdarstellung $P_i = Q_i$ für $i = 0, \dots, n$.

b) **Falsch.**

Wähle z.B. $n = 1$, $m = 2$, $P_0 = \binom{0}{0}$, $P_1 = \binom{1}{1}$
$Q_0 = \binom{0}{0}$, $Q_1 = \binom{1/2}{1/2}$, $Q_2 = \binom{1}{1}$.

Offensichtlich gilt $P(t) = Q(t)$ $\forall t \in [0,1]$, aber nicht einmal $n = m$.

[Hintergrund: Sei P durch die Punkte $P_0, \dots, P_n$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben. Dann ist P Polynom vom Grad $\leq n$, d.h. für jedes $m \geq n$ gibt es Koeffizienten $Q_0, \dots, Q_m$, die P bezüglich der Bernstein-Basis vom Grad m darstellen. Natürlich stimmen diese Koeffizienten mit $P_0, \dots, P_n$ nicht überein ...]

Aufgabe 5

Bedingung für die Randpunkte: $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tangenten in Randpunkten und Symmetrie: $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

erhalte $Q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix}$

$Q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix}$, $Q_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

C^0-Fortsetzung: $Q_0 = P_4$ ✓

C^1-Fortsetzung: $4 \cdot (P_4 - P_3) = P'(1) \overset{!}{=} Q'(0) = 4(Q_1 - Q_0)$ ✓

C^2-Fortsetzung: $P''(1) \overset{!}{=} Q''(0)$,

d.h.

$$12(P_4 - 2P_3 + P_2) = 12(Q_2 - 2Q_1 + Q_0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta \\ -1 + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta + 2\alpha \\ \beta - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \beta = 1, \ \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Casteljau für $t = \frac{1}{2}$ liefert:

$$P_{01} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad P_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad P_{21} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_{31} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{02} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad P_{12} = \begin{pmatrix} 7/8 \\ 7/8 \end{pmatrix} \quad P_{22} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{03} = \begin{pmatrix} 15/16 \\ 11/16 \end{pmatrix} \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 11/16 \\ 15/16 \end{pmatrix}$$

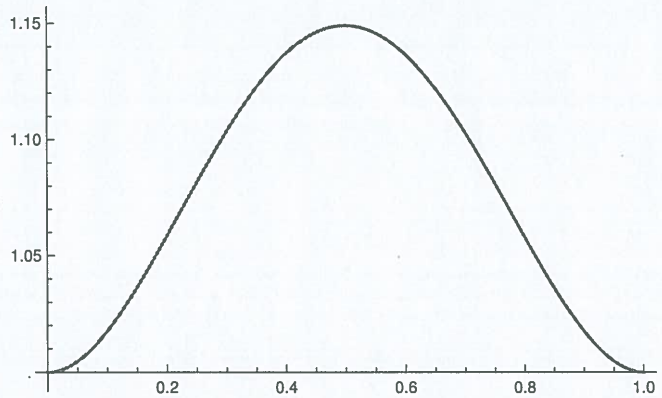
$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) = P_{04} = \begin{pmatrix} 13/16 \\ 13/16 \end{pmatrix}$$

$\left\| P\left(\frac{1}{2}\right) \right\|_2 \approx 1.15 \Longrightarrow$ Schlechte Annäherung an den Viertelkreis!

(Illustration zu Aufgabe 5)

In[169]:=
```
Px[t_] := BernsteinBasis[4, 0, t] + BernsteinBasis[4, 1, t] +
  BernsteinBasis[4, 2, t] + BernsteinBasis[4, 3, t] 1 / 2
Py[t_] := BernsteinBasis[4, 1, t] 1 / 2 + BernsteinBasis[4, 2, t] +
  BernsteinBasis[4, 3, t] + BernsteinBasis[4, 4, t]
norm[t_] := Sqrt[Px[t]^2 + Py[t]^2]
Plot[norm[t], {t, 0, 1}]
ParametricPlot[{{Px[s], Py[s]}, {s, Sqrt[1 - s^2]}}, {s, 0, 1}]
```

Out[172]=



Out[173]=