Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 2

Abgabe am 18. April vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (2 + 2 + 2 + 2 = 8 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ein Kegel K ist genau dann konvex wenn $K + K \subset K$ gilt.

b) Ist $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $x \in C$ so gilt

$$T(C, x) = \mathrm{cl}\{\alpha(y - x) : \alpha > 0, y \in C\},$$

wobei "cl" ("closure") den Abschluss bezeichnet.

c) Für konvexes $C \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in C$ gilt:

(i) Der Tangentialkegel $T(C, x)$ ist konvex und der Normalenkegel $N(C, x) := T(C, x)^\circ$ ist abgeschlossen.

(ii) Aus $x \in \mathrm{int}(C)$ folgt $N(C, x) = \{0\}$.

d) Für einen konvexen Kegel K und seinen Polarkegel K° gilt:

(i) $0 \in K$ impliziert $K^\circ = N(K, 0)$.

(ii) Sind $K_1 \subset K_2$ konvexe Kegel, so folgt $K_2^\circ \subset K_1^\circ$.

(iii) K° ist konvex und abgeschlossen.

Aufgabe 2. (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei $x^* = (0, 0)^T$ und S_α mit $\alpha \geq 0$ gegeben durch

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 - x_1^{1+\alpha} \leq 0, -x_1^{1+\alpha} - x_2 \leq 0, -x_1 \leq 0\}.$$

a) Skizzieren Sie S_α und geben Sie den Tangentialkegel von S_α in x^* an.

b) Berechnen Sie den Linearisierungskegel von S_α in x^*. Für welche Werte von α ist x^* regulär?

Aufgabe 3. (3 + 2 + 2 + 1 = 8 Punkte)

Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und abgeschlossen.

a) Beweisen Sie, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ein eindeutiges $z \in C$ gibt, das

$$z = \underset{w \in C}{\operatorname{argmin}} \|w - x\|_2$$

erfüllt und durch

$$\langle z - x, z - w \rangle \leq 0 \qquad \text{für alle } w \in C \tag{1}$$

charakterisiert ist. Interpretieren Sie (1) geometrisch.

In Teilaufgabe a) haben wir also gezeigt, dass die folgende Abbildung

$$P_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto \underset{w \in C}{\operatorname{argmin}} \|w - x\|_2,$$

die sog. *(metrische) Projektion auf C*, wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Projektion:

- Monotonie: Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle P_C(x_1) - P_C(x_2), x_1 - x_2 \rangle \geq \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\|_2^2.$$

- P_C ist nicht expandierend: Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\|_2 \leq \|x_1 - x_2\|_2.$$

c) Geben Sie konkrete Formeln für die Projektion auf folgende Mengen an:

- $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$
- $W_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$ mit Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \ldots n$.

d) Sei $\sigma > 0$ und $x^* \in C$. Zeigen Sie, dass die *Variationsungleichung* (Optimalitätsbedingung)

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in C$$

äquivalent zur *Projektionsformel*

$$x^* = P_C\left(x^* - \sigma \nabla f(x^*)\right)$$

ist.