Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 3

Abgabe am 25. April vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $y \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Für $\gamma > 0$ und eine nichtleere, konvexe Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir das Optimierungsproblem

$$\min_{z\in C} J(z) = \frac{1}{2}\|Az - y\|_2^2 + \frac{\gamma}{2}\|z\|_2^2. \tag{P}$$

In Aufgabe 1 auf Übungsblatt 1 haben wir gezeigt, dass (P) eine eindeutige Lösung x besitzt. Sei nun x_h die Lösung des Minimierungsproblems (P_h), das man erhält, indem man in (P) die Matrix A durch eine gestörte Matrix $A_h \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ersetzt.
Zeigen Sie, dass für alle $M > 0$ eine Konstante $L = L(M, A, x, y, \gamma) > 0$ gibt, sodass

$$\|x - x_h\|_2 \leq L\|A - A_h\|_2$$

gilt, solange $\|A - A_h\|_2 \leq M$ erfüllt ist.

<u>Hinweis:</u> Setzen Sie in die Variationsungleichungen für (P) und (P_h) geeignete Testvektoren ein und addieren Sie die Ungleichungen.

Aufgabe 2. (2 + 3 = 5 Punkte)

Gegeben sei das Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} -x_1 \qquad \text{s.t.} \qquad x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0, \quad -x_1 \leq 0, \quad -x_2 \leq 0.$$

a) Skizzieren Sie die zulässige Menge und ermitteln Sie so graphisch die Lösung x^* des Problems.

b) Geben Sie den Tangentialkegel und den Linearisierungskegel der zulässigen Menge in x^* an. Ist die Abadie bzw. die Guignard CQ in x^* erfüllt?

Aufgabe 3. (2 + 2 = 4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $b \in \mathbb{R}^n$. Für einen Radius $\Delta > 0$ betrachten wir das quadratische Optimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x \qquad \text{sodass} \qquad g(x) := \frac{1}{2}\|x\|_2 - \frac{1}{2}\Delta^2 \le 0 \tag{QP}$$

a) Sei $\bar{x}$ ein globaler Minimierer von (QP). Zeigen Sie, dass im Punkt $\bar{x}$ die KKT-Bedingungen gelten und formulieren Sie diese.

b) Zeigen Sie, dass für der Lagrange-Multiplikator λ aus den KKT-Bedingungen zusätzlich gelten muss: $A + \lambda I$ ist positiv semidefinit.

Aufgabe 4. (3 + 2 = 5 Punkte)

Gegeben sei die Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ der "monoton ansteigenden Vektoren in $\mathbb{R}^n$":

$$C = \{x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 \le x_2 \le ... \le x_{n-1} \le x_n\}.$$

a) Bestimmen Sie für $x^* = (0, ..., 0)^T \in C$, $x^* = (0, 0, 1, ..., 1)^T$ bzw. $x^* = (0, 0, 1, 2, 2, ..., 2)^T$ jeweils den Tangentialkegel $T(C, x^*)$.

b) Zeigen Sie dass für einen Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ und seine metrische Projektion $y = P_C(z)$ auf C (zur Definition siehe Übungsblatt 2) gilt:

$$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Gibt es (jeweils) eine abgeschlossene Menge $M \subset \mathbb{R}^2$, $0 \in M$, mit folgenden Eigenschaften?

a) $N(M, 0) = \{0\}$, aber $\mathrm{int}(M) = \emptyset$.

b) $K(M, 0) = \mathbb{R}^2$, aber $T(M, 0) = \{0\}$.

Programmieraufgabe 1. (20 Punkte)

In dieser Aufgabe behandeln wir unter anderem eine einfache Möglichkeit zur numerischen Lösung von Problemen der Form

$$\min_{x \in C} f(x)$$

mit einer einmal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und einer konvexen, abgeschlossenen Menge $C \subset \mathbb{R}^n$.

Aus der Vorlesung "Einführung in die Grundlagen der Numerik" dürfte bereits das Gradientenverfahren mit Backtracking zur Bestimmung einer Armijo-Schrittweite bekannt sein. Details können Sie ggf. im Skript der Vorlesung des Wintersemesters 2018/19 nachlesen. Das Passwort wurde in der Vorlesung bekanntgegeben.

Eine relativ einfache Modifikation zur Einbeziehung der konvexen Nebenbedingung $x \in C$ ist der folgende Algorithmus:

Projiziertes Gradientenverfahren

Input: Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, Toleranz $\epsilon > 0$, Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^n$, maximale Anzahl der Iterationen $N \in \mathbb{N}$, metrische Projektion $P_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow C$, Linesearch-Parameter $0 < c$, $0 < \beta < 1$.

Output: Annäherung $x \in \mathbb{R}^n$ für einen Minimierer von f auf C

1 $x \longleftarrow x_0$;
2 **for** $n = 1, \ldots, N$ **do**
3 $\quad d \longleftarrow -\nabla f(x)$;
4 $\quad$ **if** $\|x - P_C(x + d)\|_2 < \epsilon$ **then**
5 $\quad\quad$ Gebe x zurück.
6 $\quad$ **else**
7 $\quad\quad$ Finde minimales $m \in \mathbb{N}_0$ das die (modifizierte) Armijo-Bedingung

$$f(P_C(x + \beta^m d)) - f(x) \leq -\frac{c}{\beta^m} \|x - P_C(x + \beta^m d)\|_2^2$$

$\quad\quad$ erfüllt.
8 $\quad\quad$ Setze $x \longleftarrow P_C(x + \beta^m d)$;
9 $\quad$ **end**
10 **end**

Das Abbruchkriterium der Iteration (in Zeile 4) ist durch die Projektionsformel (siehe Aufgabe 3d auf Übungsblatt 2) motiviert. Ein minimales $m \in \mathbb{N}_0$, sodass die Schrittweite β^m die modifizierte Armijo-Bedingung erfüllt, kann wie im bereits bekannten Fall ohne Nebenbedingungen mittels Backtracking bestimmt werden.

Eine entsprechende Verallgemeinerung des Newton-Verfahrens gibt es für sog. *boxconstraints*, d.h. $C = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b \text{ komponentenweise}\}$ mit $a \leq b \in \mathbb{R}^n$. Hier wird allerdings die Struktur der Nebenbedingung ausgenutzt.

Abgabe der Programmieraufgabe in der Woche 29. April bis 3. Mai