Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 8

Abgabe am 6. Juni vor der Vorlesung

Hinweis: Am 30. Mai (Christi Himmelfahrt) finden keine Vorlesungen statt. Daher beträgt der Bearbeitungszeitraum für dieses Übungsblatt zwei Wochen.

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Seien $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $a \in \mathbb{R}^m$. Stellen Sie das zum Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \qquad \text{sodass} \quad Ax = 0, \quad x \leq 0.$$

gehörige *duale* Problem auf.
Formulieren Sie hierbei das innere Infimum des dualen Problems durch geeignete Nebenbedingungen um, sodass Sie ein Problem mit ähnlicher Struktur wie das Ausgangsproblem erhalten.

Aufgabe 2. (1 + 3 = 4 Punkte)

Für das restringierte Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad \text{sodass} \quad g(x) \leq 0, \tag{P}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ besteht der Ansatz des sog. *Barriere-Verfahrens* darin, für immer kleiner werdendes $\tau > 0$ das unrestringierte Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} b_\tau(x) := f(x) - \tau \sum_{i=1}^{m} \log(-g_i(x))$$

zu lösen und dessen Lösungen x_τ als Näherungen für die Lösung von (P) zu verwenden.

a) Bestimmen Sie die x_τ für das folgende Optimierungsproblem:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} x \qquad \text{sodass} \quad -x \leq 0.$$

b) Zeigen Sie: Falls für $\tau \searrow 0$ gilt

$$\lim_{\tau \searrow 0} x_\tau = x^* \in \mathbb{R}^n, \qquad \lim_{\tau \searrow 0} -\frac{\tau}{g_i(x_\tau)} = \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, m),$$

dann muss x^* ein KKT-Punkt für (P) sein.

Aufgabe 3. (2 + 3 + 3 = 8 Punkte)

a) Zeigen Sie die folgende Aussage:

Für reguläres $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $u, v \in \mathbb{R}^n$ ist $A + uv^T$ genau dann regulär, wenn $\sigma := 1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ gilt. In diesem Fall gilt dann die sog. *Sherman-Morrison-Woodbury-Formel*

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \sigma^{-1} A^{-1} u v^T A^{-1}.$$

Im Newton-Verfahren zur Lösung der Gleichung

$$\nabla f(x) \overset{!}{=} 0$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in jedem Schritt die Gleichung

$$\nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k) \tag{1}$$

zu lösen, d.h. es muss $(\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ ausgewertet werden. Statt $\nabla^2 f(x_k)$ in jedem Schritt neu zu berechnen, bietet sich ein sog. *Quasi-Newton-Verfahren* an, d.h. für geeignete Matrizen H_k wird statt (1) die Gleichung

$$H_k(x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k) \tag{2}$$

gelöst. Hierbei sollen die $(H_k)_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrizen sein, die die sog. Quasi-Newton-Gleichung

$$H_{k+1} d_k = y_k, \qquad \text{mit} \quad d_k := x_{k+1} - x_k, \quad y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$

erfüllen. Man kann folgendes Konvergenzverhalten beweisen: Erfüllt f in $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(\bar{x}) = 0$ die hinreichenden Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung und erzeugt das durch (2) definierte Verfahren eine gegen $\bar{x}$ konvergente Folge von Iterierten $(x_k)_k$, derart, dass außerdem $\lim_{k\to\infty} \|H_{k+1} - H_k\| = 0$ gilt, so konvergiert $(x_k)_k$ sogar q-superlinear gegen $\bar{x}$.

b) Bestimmen Sie $u_k \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die durch die Rekursion

$$H_k = H_{k-1} + u_k u_k^T$$

definierten Matrizen die Quasi-Newton-Gleichung erfüllen. Geben Sie $H_k^{-1} s$ für $s \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel an.

Bemerkung: Diese Update-Formel für H_k heißt sog. Symmetrische Rang-1-Formel ("SR1-Formel").

Die wohl bekannteste Update-Formel für Quasi-Newton-Verfahren, die sog. Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Formel (BFGS-Formel), entsteht durch eine symmetrische Range-2-Aufdatierung:

$$H_{k+1} := H_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T d_k} - \frac{H_k d_k (H_k d_k)^T}{d_k^T H_k d_k}, \qquad y_k^T d_k \neq 0, d_k^T H_k d_k \neq 0.$$

Das mit dieser Rekursionsformel durchgeführte Quasi-Newton-Verfahren heißt auch *BFGS-Verfahren* und hat sich als die in der Praxis effizienteste Variante des Newton-Verfahrens erwiesen.

c) Zeigen Sie, dass die durch das BFGS-Update erzeugte Matrizen die Quasi-Newton-Gleichung erfüllen und dass H_{k+1} positiv definit ist, wenn H_k positiv definit war und $y_k^T d_k > 0$ gilt.

Bemerkung: Durch zweimalige Anwendung der Sherman-Morrison-Woodbury-Formel lässt sich natürlich auch im Falle des BFGS-Updates H_{k+1}^{-1} auf einen Vektor anwenden, ohne dass H_{k+1}^{-1} explizit berechnet werden muss.

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

soll mit dem expliziten und dem impliziten Euler–Verfahren mit fester Schrittweite h gelöst werden. Bestimmen Sie jeweils explizit die Iterierten $(y_{1,k}, y_{2,k})$ und vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung an der Stelle $x_k = kh$. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 5. (2 + 3 = 5 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) = -\mathrm{sign}(y),$$
$$y(-1) = 1,$$

mit

$$\mathrm{sign}(y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y > 0 \\ 0 & \text{falls } y = 0 \\ -1 & \text{falls } y < 0. \end{cases}$$

a) Man bestimme die exakte Lösung für alle $x \geq -1$.

b) Für das explizite Eulerverfahren zu fester Schrittweite h, gegeben durch

$$y_0 := -1, y_{k+1} := y_k + hf(x_k, y_k), x_k := -1 + hk, k \in \mathbb{N}_0,$$

untersuche man das Verhalten der Näherungen y_k an $y(x_k)$ für $x_k \approx 0$, $k \in \mathbb{N}$. Man begründe das Verhalten der Näherungen. Wie kann man Abhilfe schaffen?

Aufgabe 6. (2 + 3 = 5 Punkte)

Tipp: Erinnern Sie sich an die Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion.

a) Sei $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Projektion, d.h. P ist linear und erfüllt $P^2 = P$. Bestimmen Sie die Lösung von

$$\dot{y} = Py, \qquad y(0) = y_0.$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass der Realteil aller Eigenwerte von A negativ ist. Zeigen Sie, dass für beliebiges $y_0 \in \mathbb{R}^n$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y} = Ay, \qquad y(0) = y_0,$$

stets die Eigenschaft $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ besitzt.