Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2019

Prof. Dr. Ira Neitzel
Fabian Hoppe

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 9

Abgabe am 18. Juni (Dienstag!) vor der Vorlesung

Aufgabe 1. (6 Punkte)

In dieser Aufgabe soll anhand zweier Beispielen das Langzeitverhalten der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen illustriert werden.

a) Offenbar ist $y \equiv 0$ eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{y} = Ay$, $y(0) = 0$, für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir nehmen nun an, dass A zwei *nichtreelle* Eigenwerte $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$ besitzt.

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von λ, ob $y \equiv 0$ stabil[1] bzw. attraktiv [2] ist, indem Sie die Lösung der Differentialgleichung für $y(0) = y_0$, $y_0 \neq 0$, bestimmen und deren Verhalten für $t \longrightarrow \infty$ untersuchen.

b) Bonusaufgabe (+6 Punkte)

Gegeben sei das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + (1 - x^2 - y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^2$. Formulieren Sie dieses System mit Hilfe von Polarkoordinaten $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$, $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ in gewöhnliche Differentialgleichungen für r und φ um und untersuchen Sie so das Verhalten der Lösungen.

Hinweis: Sie müssen die DGL nicht explizit lösen. Eine Anwendung des Vergleichssatzes genügt, um das Langzeitverhalten qualitativ zu untersuchen.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y)$, $y(0) = y_0$, ist das *modifizierte Eulerverfahren* (auch *Euler-Collatz-Verfahren*) durch die folgende Vorschrift gegeben:

$$y_{i+1} := y_i + h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(t_i, y_i)\right),$$

a) Geben Sie das zugehörige Butcher-Tableau an.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass das modifizierte Eulerverfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ hat, falls f hinreichend glatt ist.

[1] $y \equiv 0$ heißt stabil, wenn es zu jeder Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von 0 und jedem $t_0 \in [0, \infty)$ eine Umgebung $V = V(U, t_0) \subset \mathbb{R}^2$ von 0 gibt, derart, dass $w(t) \in U$ für alle $t \in [t_0, \infty)$ gilt für die Lösungen von $\dot{w} = Aw$ mit $w(t_0) \in V$.

[2] $y \equiv 0$ heißt attraktiv, wenn es zu jedem $t_0 \in [0, \infty)$ eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^2$ von 0 gibt, derart, dass $w(t) \longrightarrow 0$ $(t \longrightarrow \infty)$ für die Lösungen der DGL $\dot{w} = Aw$ mit $w(t_0) \in V$ gilt.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das durch die Verfahrensfunktion

$$\varphi(t_m, y_m, h) = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &:= f\left(t_m, y_m\right), \\ k_2 &:= f\left(t_m + h/2, y_m + h/2 \cdot k_1\right), \\ k_3 &:= f\left(t_m + h, y_m + h(-k_1 + 2k_2)\right), \end{aligned}$$

gegebene Einschrittverfahren (*"einfache Kutta-Regel"*) die Konsistenzordnung $p = 3$ besitzt, wenn f hinreichend glatt ist.
Geben Sie auch das zugehörige Butcher-Tableau an.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Zur Konvergenzverbesserung der Euler-Verfahren betrachtet man eine erweiterte Klasse von Einschrittverfahren, welche allgemein über folgenden Ansatz definiert werden:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^{s} b_j f(t_i + c_j h, \eta_j), \qquad \sum_{j=1}^{s} b_j = 1. \tag{3}$$

Hierbei sind c_j die *Knoten* des Verfahrens, b_j die *Gewichte*, sowie η_j geeignete Näherungen an y_i bzw. y_{i+1}. Die Euler-Verfahren beispielsweise sind Spezialfälle (explizit: $s = 1$, $c_1 = 0$, $\eta_1 = y_i$, sowie implizit: $s = 1$, $c_1 = 1$, $\eta_1 = y_{i+1}$). Beweisen Sie dazu die folgende Aussage:
Hat ein Verfahren der Form (3) die Konsistenzordnung q, dann hat die Quadraturformel

$$Q[g] = \sum_{j=1}^{s} b_j g(c_j) \approx \int_0^1 g(x)dx$$

den Exaktheitsgrad $q - 1$.

Hinweis: Betrachten Sie passend gewählte konkrete Anfangswertprobleme.

Programmieraufgabe 1. (21 Punkte)

siehe `jupyter notebook`.

Abgabe der Programmieraufgabe in der Woche 17. bis 21. Juni