Programmieraufgabe V (21 Punkte)

Abgabe in der Woche 17. bis 21. Juni

In [81]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Teilaufgabe i: 8 Punkte

Implementieren Sie zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{y}(t) = f(t, y) \qquad \forall t \in [t_0, t_1], \qquad y(t_0) = y_0$$

auf dem Intervall $[t_0, t_1]$

1. das explizite Eulerverfahren mit $nsteps$-vielen Schritten
2. das implizite Eulerverfahren mit $nsteps$-vielen Schritten: Die auftretende nichtlineare Gleichung soll mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst werden.

Die Funktion f soll jeweils zusammen mit $nsteps$ und t_0, t_1 sowie dem Vektor y_0 als Input übergeben werden. Im Falle des impliziten Euler-Verfahrens soll auch die Ableitung $D_y f$ als Input übergeben werden. Denken Sie an geeignete Fehlermeldungen, z.B. wenn das Newton-Verfahren nicht erfolgreich war.

In [ ]:
```
```

Teilaufgabe ii: 5 Punkte

Testen Sie Ihre Implementierung an der sogenannten

Räuber-Beute Gleichung

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1(1 - y_2), \qquad \dot{y}_2 = y_2(y_1 - 1), \qquad y_1(0) = y_0^1, y_2(0) = y_0^2.$$

Probieren Sie verschiedene Startwerte (y_0^1, y_0^2) sowie Parameter $\alpha > 0$. Variieren Sie die Schrittweiten im Euler-Verfahren und die Länge des Zeitintervalls $[t_0, t_1] = [0, T]$.

Lassen Sie jeweils die Lösungen $t \mapsto y_i(t), i = 1, 2$, sowie das Phasenfeld $\{(y_1(t), y_2(t)) : t \in [0, T]\} \subset \mathbb{R}^2$ plotten. Was fällt auf?

In [ ]:
```
```

Teilaufgabe iii: 8 Punkte

Testen Sie Ihre Implementierung auch an der Gleichung

$$my'' + ry' + D(y - L) = g, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

die die Auslenkung $y(t)$ eines Federpendels mit Masse m beschreibt. Der zweite Term der linken Seite beschreibt die Reibungskraft, der dritte Term die Dehnungskraft und g steht für eine von außen wirkende Kraft. Die Startwerte y_0 bzw. y_1 beschreibe anfängliche Auslenkung bzw. Geschwindigkeit. $m, r, D, L \in \mathbb{R}$ sind Konstanten, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine zeitabhängige Funktion.

Plotten Sie die Lösung für verschiedene Parameter.

In [ ]:

```
```

Vergleichen Sie für $m = 1$, $r = 0$, $D = 1$, $L = 0$, $g \equiv 0$, $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ die numerisch berechnete mit der exakten (analytisch bekannten) Lösung auf dem Intervall $[0, 8\pi]$:

Plotten Sie für für fixierte Schrittweiten und das implizite bzw. explizite Eulerverfahren jeweils die Differenz zwischen der exakten Lösung und der numerisch berechneten Lösung in Abhängigkeit von der Zeit. Erstellen Sie auch einen Plot, aus dem hervorgeht, wie sich der maximale Fehler in Abhängigkeit von der Schrittweite verhält (Konvergenzordnung!).

Was können Sie beobachten?

In [ ]:

```
```