



# Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020  
Prof. Dr. Jochen Garcke  
Christopher Kaewin



## Übungsblatt 0.

Abgabe am -.

### Aufgabe 1. (Newton-verfahren I)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(x-1)y^2 &= 0, \\ x(x-2)(y+2) &= 0.\end{aligned}$$

- Bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Systems.
- Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an und führen Sie ausgehend vom Startwert  $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1, 1)$  den ersten Iterationsschritt durch.  
(0 Punkte)

### Aufgabe 2. (Newton-Verfahren II)

Wir wollen nun das Newton-Verfahren zur Berechnung von  $x = 1/a$  mit  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  betrachten, d.h. wir suchen die Nullstelle von  $f(x) = 1/x - a$ .

- Zeigen Sie, dass die zugehörige Iterationsvorschrift die Gestalt

$$x_{k+1} = x_k + x_k(1 - ax_k) \quad \text{für } k \geq 0$$

hat. Mit welchen arithmetischen Operationen kann man somit die Division  $b/a$  approximieren?

- Zeigen Sie, dass für den Fehler  $\varepsilon_k = x_k - 1/a$  die Rekursion  $\varepsilon_{k+1} = -a\varepsilon_k^2$  gilt. Welche Vorzeichen haben  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ ?
- Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\varepsilon_k = -\frac{1}{a}\rho^{2^k} \quad \text{mit } \rho = (1 - ax_0).$$

Welche Bedingung für  $\rho$  bzw.  $x_0$  ist hinreichend und notwendig für die Konvergenz des Iterationsverfahrens? Wie ist die Konvergenzrate?

- Wir wollen  $x = a^{1/n}$  mit dem Newton-Verfahren berechnen. Wie lautet die zugehörige Iterationsvorschrift?

(0 Punkte)