Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Dienstag, 12.5.20 bis 10:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (BFGS-Formel)

Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass die BFGS-Formel

$$H_{k+1}^{\mathrm{BFGS}} = H_k + \frac{y^k (y^k)^\top}{(y^k)^\top d^k} - \frac{H_k d^k (H_k d^k)^\top}{(d^k)^\top H_k d_k}$$

die Quasi-Newton-Gleichung erfüllt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (BFGS-Newton Verfahren)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch positiv definit und $b, c \in \mathbb{R}^n$. Zudem sei $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Wir betrachten die Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{2} x^\top A x - x^\top b\,, \quad g(x) = f(Cx + c)\,.$$

Zeigen Sie, dass das BFGS-Newton Verfahren *affin invariant* ist: Wendet man das BFGS-Newton Verfahren mit Startmatrix $B^{(0)} = CC^\top$ auf die Funktion f an, und wendet man das BFGS-Newton Verfahren mit Startmatrix $D^{(0)} = I_n$ auf die Funktion g an, so gilt für die Iterierten

$$\forall k\colon \quad x^{(k)} = Cy^{(k)} + c\,,$$

sofern dies auch für die Startpunkte ($k = 0$) gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Mittelwertmatrix)

a) Zeigen Sie: Wenn $F \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ und die Folge $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen x^* konvergiert, dann gilt

$$\lim_{k \to \infty} ||M(x^k, x^{k+1}) - \nabla^2 F(x^k)|| = 0\,.$$

b) Zeigen Sie: Wenn die Hesse-Matrix von F in einer Umgebung U von x^* Lipschitz-stetig ist, dann gilt

$$||M(x^k, x^{k+1}) - \nabla^2 F(x^k)|| \leq \frac{L}{2} ||x^{k+1} - x^k||\,.$$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (lokales BFGS-Verfahren)

In dieser Programmieraufabe soll es darum gehen, das lokale BFGS-Verfahren in $\mathbb{R}^2$ zu implementieren und an einer Beispielfunktion zu testen.

a) Implementieren Sie Algorithmus 4 aus der Vorlesung. Als Input soll die Routine einen Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}^2$, eine symmetrische und positiv definite Matrix $B^{(0)} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die zu minimierende Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und den Gradienten $\nabla F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bekommen. Die Routine soll die von Algorithmus 4 generierte Folge $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(N)} \in \mathbb{R}^2$ ausgeben. Wählen Sie für die Schleife das Abbruchkriterium $\|\nabla F(x^k)\| \leq 10^{-6}$.

b) Testen Sie ihre Routine für $x^{(0)} = (1, 1)^\top$, $B^{(0)} = I_2$ und

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^4 + x_2^2(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 .$$

Plotten Sie die Ausgabe als Punktfolge in $\mathbb{R}^2$ zusammen mit der Funktion F. Studieren Sie zusätzlich das Verhalten des Fehlers $\|x^{(k)} - x^*\|$. wie ist die Konvergenzrate?

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe kann bis zum 19.5.20 abgegeben werden. Es muss der Code, die ausführbare Datei und die Ausgabe in einer ersichtlichen Form beigelegt werden. Sie dürfen die Programmiersprache frei wählen, wir empfehlen allerdings Python oder C++.