Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 16.6.20 bis 10:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (Penalty-Verfahren)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \text{ u.d.N. } g(x) \leq 0$$

mit $f(x) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2$ und $g(x) = -x_2$. Beim quadratischen Penalty-Verfahren berechnet man für eine gegen unendlich strebende Folge positiver α-Werte jeweils eine globale Lösung $x(\alpha)$ des unrestringierten Optimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^2} P_\alpha(x)$ mit $P_\alpha(x) = f(x) + \frac{\alpha}{2} \max^2\{0, g(x)\}$.

a) Bestimmen Sie die Lösung (x^*, λ^*) des restringierten Optimierungsproblems.

b) Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das globale Minimum $x(\alpha)$ von P_α.

c) Zeigen Sie $x^* = \lim_{\alpha \to \infty} x(\alpha)$ und $\lambda^* = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \max\{0, g(x(\alpha))\}$.

Bonus: Wie verhält sich die Konditionszahl der Hesse-Matrix $\nabla P_\alpha(x(\alpha))$ für $\alpha \to \infty$?

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (chemische Reaktion)

Betrachten Sie das chemische Reaktionsschema

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &\underset{\sigma_1}{\overset{\sigma_2}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B} \\ \mathrm{B} + \mathrm{C} &\underset{\tau_1}{\overset{\tau_2}{\rightleftharpoons}} \mathrm{A} + \mathrm{B} \\ \mathrm{B} + \mathrm{B} &\underset{\upsilon_1}{\overset{\upsilon_2}{\rightleftharpoons}} \mathrm{C} + \mathrm{B}. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie das zugehörige System von Differentialgleichungen auf.

b) Bestimmen Sie die Fixpunkte des Systems.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Stetige Abhängigkeit vom Startwert)

Sei f stetig und erfülle die sogenannte *einseitige Lipschitz-Bedingung*

$$\big(f(t,y) - f(t,z)\big)^T (y - z) \leq l \, \|y - z\|_2^2$$

für alle (t, y), $(t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ und ein $l \in \mathbb{R}$. Ferner seien $y, z \colon [0, T] \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Anfangswertprobleme $y' = f(t, y)$ mit $y(0) = y_0$ bzw. $z' = f(t, z)$ mit $z(0) = z_0$ mit Vorgaben $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie für $x(t) := \|y(t) - z(t)\|_2^2$ und ein beliebiges Intervall $(a, b) \subseteq (0, T)$ mit $x(t) \neq 0$ für $t \in (a, b)$ die Beziehung

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \leq 2l.$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq e^{lt} \|y_0 - z_0\|_2 \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Damit hängt $y' = f(t, y)$ stetig von den Anfangsdaten ab.

Hinweis: Betrachten Sie $\int \frac{d}{dt} \log x(t)\, dt$ über geeigneten Integrationsgrenzen.

(5 Punkte)

Am Donnerstag, den 11.06.2020 findet eine Online-Versammlung aller Mathematikstudierenden (Fachschaftsvollversammlung) statt. Alle weiteren Informationen finden Sie unter www.fsmath.uni-bonn.de.