



Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin



Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 16.6.20 bis 10:00 Uhr.**

Aufgabe 1. (Penalty-Verfahren)

Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \text{ u.d.N. } g(x) \leq 0$$

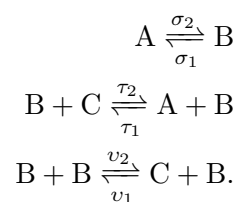
mit $f(x) = x_1^2 + 4x_2 + x_2^2$ und $g(x) = -x_2$. Beim quadratischen Penalty-Verfahren berechnet man für eine gegen unendlich strebende Folge positiver α -Werte jeweils eine globale Lösung $x(\alpha)$ des unrestringierten Optimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^2} P_\alpha(x)$ mit $P_\alpha(x) = f(x) + \frac{\alpha}{2} \max^2\{0, g(x)\}$.

- Bestimmen Sie die Lösung (x^*, λ^*) des restringierten Optimierungsproblems.
- Berechnen Sie für $\alpha > 0$ das globale Minimum $x(\alpha)$ von P_α .
- Zeigen Sie $x^* = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} x(\alpha)$ und $\lambda^* = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha \max\{0, g(x(\alpha))\}$.

Bonus: Wie verhält sich die Konditionszahl der Hesse-Matrix $\nabla P_\alpha(x(\alpha))$ für $\alpha \rightarrow \infty$?
(5 Punkte)

Aufgabe 2. (chemische Reaktion)

Betrachten Sie das chemische Reaktionsschema



- Stellen Sie das zugehörige System von Differentialgleichungen auf.
- Bestimmen Sie die Fixpunkte des Systems.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Stetige Abhängigkeit vom Startwert)

Sei f stetig und erfülle die sogenannte *einseitige Lipschitz-Bedingung*

$$(f(t, y) - f(t, z))^T (y - z) \leq l \|y - z\|_2^2$$

für alle $(t, y), (t, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ und ein $l \in \mathbb{R}$. Ferner seien $y, z: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Anfangswertprobleme $y' = f(t, y)$ mit $y(0) = y_0$ bzw. $z' = f(t, z)$ mit $z(0) = z_0$ mit Vorgaben $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$.

- a) Zeigen Sie für $x(t) := \|y(t) - z(t)\|_2^2$ und ein beliebiges Intervall $(a, b) \subseteq (0, T)$ mit $x(t) \neq 0$ für $t \in (a, b)$ die Beziehung

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \leq 2l.$$

- b) Zeigen Sie, dass

$$\|y(t) - z(t)\|_2 \leq e^{lt} \|y_0 - z_0\|_2 \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Damit hängt $y' = f(t, y)$ stetig von den Anfangsdaten ab.

Hinweis: Betrachten Sie $\int \frac{d}{dt} \log x(t) dt$ über geeigneten Integrationsgrenzen.

(5 Punkte)

Am Donnerstag, den 11.06.2020 findet eine Online-Versammlung aller Mathematikstudierenden (Fachschaftsvollversammlung) statt. Alle weiteren Informationen finden Sie unter www.fsmath.uni-bonn.de.