



Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin



Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag, 30.6.20 bis 10:00 Uhr.**

Aufgabe 1. (Butcher-Tableau)

Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten folgendes AWP

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Durch das folgende Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & 0 \end{array} \quad \text{mit } c_1 = 0, c_2 = a_{21}, c_3 = a_{31} + a_{32}$$

wird ein explizites Runge-Kutta-Verfahren definiert. Bestimmen Sie b_1 und b_2 in Abhängigkeit von c_2 so, dass das Verfahren die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Autonomisierung)

Zeigen Sie: Ein explizites Runge-Kutta-Verfahren ist invariant gegen Autonomisierung, falls es konsistent ist und

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} \quad \text{für } i = 1, \dots, s$$

erfüllt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Williamson's Runge-Kutta Verfahren)

Betrachten Sie das Runge-Kutta Verfahren zum folgenden Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & & & \\ c_2 & \frac{1}{3} & & \\ c_3 & -\frac{3}{16} & \frac{15}{16} & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{3}{10} & \frac{8}{15} \end{array}$$

- a) Das gegebene Verfahren ist anwendbar auf autonome Anfangswertprobleme. Erweitern Sie es nun ohne Ordnungsverlust so, dass es auch für nicht autonome Differentialgleichungen anwendbar ist, d.h. berechnen Sie die Koeffizienten c_i passend.

- b) Zeigen Sie, dass das Verfahren Ordnung 3 besitzt.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Runge-Kutta Verfahren)

Implementieren Sie das klassische Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und lösen Sie folgendes AWP

$$\dot{x}(t) = t\sqrt{x(t)} \quad \text{mit } x(0) = 1$$

mit der Zeitschrittweite $\delta t = 0.1$ bis $T = 10$. Plotten die errechnete Lösung, die exakte Lösung $x(t) = \frac{1}{16}(t^2 + 4)^2$, und den Fehler in Abhängigkeit von der Zeit.

(10 Punkte)

Die Programmieraufgabe kann bis zum 7.7.20 abgegeben werden. Es muss der Code, die ausführbare Datei und die Ausgabe in einer ersichtlichen Form beigelegt werden. Sie dürfen die Programmiersprache frei wählen, wir empfehlen allerdings Python oder C++.