Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2020
Prof. Dr. Jochen Garcke
Christopher Kacwin

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag, 14.7.20 bis 10:00 Uhr**.

Aufgabe 1. (Stabilitätsintervall)

Gegeben ist das einstufige implizite Verfahren

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} + hg, \quad g = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y^{(k)} + hg\right).$$

Bestimmen Sie die Stabilitätsfunktion $R(z)$ und das Stabilitätsintervall

$$\{z \in \mathbb{R} \colon |R(z)| \leq 1\}$$

dieses Verfahrens.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Fixpunktiteration für das implizite Euler-Verfahren)

Betrachten Sie die Fixpunktiteration zur Lösung der Rekursionsgleichung

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + hf\left(t_{k+1}, u^{(k+1)}\right)$$

des impliziten Euler-Verfahrens mit $t_k = k\,h$ und $i = 0, \ldots, N$. Zeigen Sie, dass die Fixpunktiteration konvergiert, falls f bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ der folgenden Lipschitz-Bedingung genügt,

$$\|f(\tau, y) - f(\tau, z)\|_2 \leq L\|y - z\|_2 \quad y, z \in \mathbb{R}^d, \quad \tau \in [0, T],$$

und die Schrittweite h kleiner als $1/L$ gewählt wird. Geben Sie eine Funktion f an, für die die Fixpunktiteration im Fall $h = 1/L$ divergiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (hochdimensionales Modellproblem)

Gegeben ist die Anfangswetaufgabe $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ mit einer diagonalisierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zudem sei ein Einschrittverfahren gegeben, welches sich darstellen lässt durch

$$y^{(k+1)} = R(hA)y^{(k)}, \; y^{(0)} = x_0$$

mit einer rationalen Funktion R. (R ist der Quotient von 2 Polynomen, in die sich sowohl Skalare als auch Matrizen einsetzen lassen.) Zeigen Sie:

a) Ist das Einschrittverfahren konsistent, so gilt $R(0) = 1$.

b) Hat das Einschrittverfahren Konsistenzordnung p, so gilt $R(z) = \exp(z) + \mathcal{O}(z^{p+1})$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Runge-Kutta Verfahren)

Das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = -\lambda \left(x(t) - \exp(-t)\right) - \exp(-t), \quad x(0) = 1$$

besitzt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung $x(t) = \exp(-t)$ auf $[0, T]$. Verwenden Sie die Implementierung des Runge-Kutta Verfahrens von Blatt 9 und plotten Sie für folgende Konfigurationen den Fehler zur exakten Lösung.

Konfiguration	1	2
T	1	0.1
λ	1	1000
Schrittweite	0.01	0.01

Hinweis: Sie können hierfür die Implementierung nutzen, die auf der Webseite verfügbar ist.

(5 Punkte)