Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Donnerstag, 23.06.2022**.

Hinweis. Das zur der Inkrementfunktion in (3.3.8) aus der Vorlesung gehörige Verfahren heißt Runge-Kutta-Verfahren. Sie finden die zugehörigen Notizen dazu auch auf der Webseite der Vorlesung.

Aufgabe 1. (B-Splines)

Zu gegebenen monoton wachsenden Knoten t_i, $i \in \mathbb{Z}$ seien $B_{i,r}$ die zugehörigen B-Splines. Zeigen Sie unter Benutzung der B-Spline-Rekursion

(a) $B_{i,r}(x) = 0$ für $x \notin [t_i, t_{i+r})$,

(b) $B_{i,r}(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(c) $B_{i,r}$ ist auf jedem Intervall $[t_j, t_{j+1})$ ein Polynom vom Grad $\leq r - 1$.

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)

Aufgabe 2. (Stufe und Konsistenzordnung expliziter Runge-Kutta-Verfahren)

Zeigen Sie, dass für ein s-stufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren mit Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$ für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion f als rechte Seite einer Anfangswertaufgabe $p \leq s$ gilt.

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Blow up in endlicher Zeit)

Zeigen Sie, dass eine eindeutige maximal fortgesetzte Lösung x^* der Anfangswertaufgabe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = 1 + (x(t))^4, \quad x(0) = 0$$

existiert, wobei ein $t_+ \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\lim_{t \uparrow t_+} |x^*(t)| = \infty$.

Hinweis: Zeigen Sie den zweiten Teil der Aussage unter anderem mithilfe eines Widerspruchsbeweises.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. (Autonomisierung)

Eine gewöhnliche Differentialgleichung heißt autonom, falls ihre rechte Seite nicht von t abhängt, also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = g(x(t), t) = g(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

(a) Zeigen Sie, dass sich die nicht-autonome Anfangswertaufgabe

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d.$$

als eine autonome Anfangswertaufgabe in $d + 1$ Dimensionen schreiben lässt.

(b) Geben Sie zwei Bedingungen an die Koeffizienten des Runge-Kutta-Verfahrens an, um sicherzustellen, dass die in Teilaufgabe (a) $(d+1)$-dimensionale Anfangswertaufgabe identische Iterierte wie für die nicht-autonome d-dimensionale Anfangswertaufgabe ergibt. Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(3 + 3 = 6 Punkte)