Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 3.

Abgabe am **Donnerstag, 28.04.2022**.

Organisatorisches. Die Abgabe findet nur in Papierform statt. Die Ablage für die Abgaben bis donnerstags 12 Uhr befindet sich nun in der dritten Etage der Friedrich-Hirzebruch-Allee 7 im Schrank unterhalb des rechten Druckers, da die Postfächer gegebenenfalls nur mit einem Schlüssel zugänglich sind. Die Möglichkeit bis 10 Uhr am Donnerstag in der Vorlesung abzugeben bleibt bestehen.

Aufgabe 1. (Konvergenz des Newton-Verfahrens)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^3 + y^3 - 4 \\ x^3 - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Newton–Verfahren zur Lösung von $F(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$ für jeden Startvektor $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in [1,2] \times [1,2]$ konvergiert.

(6 Punkte)

Aufgabe 2. (Lokales Newton-Verfahren für stationäre Punkte)

Wir betrachten eine Variante des Newton-Verfahrens zur Minimierung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Sei dazu $x^* \in \mathbb{R}^d$ ein stationärer Punkt von f, d.h. $\nabla f(x^*) = 0$. Nun soll die folgende quadratische Näherung an f minimiert werden:

$$q^{(k)}(x) := f(x^{(k)}) + \nabla f(x^{(k)})^T (x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)}),$$

wobei $x^{(k)}$ den aktuellen Iterationspunkt bezeichnet. Man erhält folgenden Algorithmus

1. Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$, $\epsilon \geq 0$, setze $k := 0$.
2. Ist $\|\nabla f(x^{(k)})\|_2 \leq \epsilon$: STOP.
3. Bestimme $d^{(k)} \in \mathbb{R}^d$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems $\nabla^2 f(x^{(k)}) d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$.
4. Setze $x^{(k+1)} := x^{(k)} + d^{(k)}$, $k := k+1$, und gehe zu Schritt (2).

Sei nun $\nabla^2 f(x^*)$ regulär. Ferner sei $\nabla^2 f$ lokal Hölder-stetig, d.h. es ist

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq K \|x - y\|^\alpha$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* und ein festes $\alpha \in (0,1]$. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $x^{(0)} \in B_\delta(x^*)$ gilt:

(a) Der oben stehende Algorithmus ist wohldefiniert und erzeugt eine gegen x^* konvergente Folge $\left\{x^{(k)}\right\}$.

(b) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq c\|x^{(k)} - x^*\|^{1+\alpha}$. Im Spezialfall $\alpha = 1$ ergibt sich also wieder die schon bekannte quadratische Konvergenz.

(8 Punkte)

Aufgabe 3. (Matrix-Inversion mit dem Newton-Verfahren)

Seien $GL_d \coloneqq \{A \in \mathbb{R}^{d\times d} : A \text{ regulär}\}$ und $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ regulär sowie $f : GL_d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $H \mapsto H^{-1} - A$.

(a) Zeigen Sie, dass $\exists r > 0 : B_r(A) \subset GL_d$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und für $X \in GL_d$ gilt

$$\forall H \in \mathbb{R}^{d\times d} : (Df)(X)H = -X^{-1}HX^{-1}.$$

(c) Stellen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens eine Iterationsvorschrift zur Berechnung von A^{-1} auf.

Hinweis: In der Teilaufgabe b) können Sie die Neumannsche Reihe verwenden. Das heißt für $T \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $||T|| < 1$ gilt

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathbb{R}^{d\times d}.$$

(2 + 4 + 3 = 9 Punkte)