Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 4.

Abgabe am **Donnerstag, 05.05.2022**.

Aufgabe 1. (Historisches Newton-Verfahren)

In dieser Aufgabe werden wir das Newton-Verfahren nachvollziehen wie es ursprünglich von Isaac Newton betrachtet wurde. Hierfür betrachten wir als erstes wie auch Isaac Newton das Polynom $f(x) = x^3 - 2x - 5$.

(a) Setzen Sie für den Startwert $x_0 = 2$ den Ansatz $x_k + \Delta x_k$ mit $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in f ein und setzen Sie den entstehenden Ausdruck gleich 0. Dann streichen Sie alle Terme, die in Δx_k eine höhere Ordnung als 1 haben und lösen nach Δx_k auf. Führen Sie diese Schritte bis einschließlich $k = 1$ aus.

(b) Beweisen Sie, dass das in der Teilaufgabe a) vorgestellte Verfahren angewandt auf ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eines beliebigen Grades $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ äquivalent zu dem in der Vorlesung behandelten Newton-Verfahren ist.

(2 + 4 = 6 Punkte)

Aufgabe 2. (Approximation der Hesse-Matrix)

Wir betrachten $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x) =: H(x)$ und die Approximation $B(x)$ der Hesse-Matrix durch erste Vorwärtsdifferenzen des Gradienten von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt: Falls $h_{ij}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, für ein i und j mit $1 \leq i, j \leq n$, dann ist auch $b_{ij}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Gilt dies auch für die Approximation der Hesse-Matrix durch zweite Vorwärtsdifferenzen aus den Funktionswerten?

(2 + 4 = 6 Punkte)

Programmieraufgabe 3. (Newton-Verfahren)

In dieser Programmieraufgabe wird unter anderem das auf dem letzten Übungsblatt theoretisch betrachtete Newton-Verfahren für stationäre Punkte implementiert werden.

(a) Implementieren Sie das Newton-Verfahren für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und lösen Sie mithilfe Ihrer Implementierung das nichtlineare Gleichungssystem von Blatt 3 Aufgabe 1, also

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 + y^3 - 4 \\ x^3 - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ihre Implementierung soll die Anwendung der Inversen Jacobi-Matrix auf einen Vektor zum Lösen des in dem Newton-Verfahren auftretenden Gleichungssystems als Parameter durch einen Funktionenzeiger erhalten. Ebenso soll ein Funktionenzeiger für die Evaluation der Zielfunktion, also hier F, als Parameter übergeben werden. Als Abbruchkriterium soll das relative Residuum

$$\frac{||F(x_k)||}{||F(x_0)||} < \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$$

verwendet werden. Außerdem soll das Verfahren nach einer vorgegebenen Anzahl an maximalen Iterationsschritten abbrechen. Nutzen Sie die oben referenzierte Aufgabe für die Wahl des Startwertes. Die einzige Nullstelle von F ist $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})^T$.

(b) Wenden Sie Ihre Implementierung aus der Teilaufgabe a) auf den Gradienten der Rosenbrock-Funktion

$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2$$

als Eingabe an. Verwenden Sie als Startwerte für das Newton-Verfahren $(500, -120)^T$ und $(-2, -1)^T$. Das globalen Minimum der Funktion ist $(1, 1)^T$. Diskutieren Sie anhand der Teilaufgabe b) die Vor- und Nachteile des verwendeten Abbruchkriteriums.

(6 + 6 = 12 Punkte)

Die Programmieraufgabe kann bis zum 12.05.2022 im PC-Pool des Nebengebäudes des Mathematikzentrums abgegeben werden. Bitte vereinbaren Sie mit Ihrer Tutorin bzw. Ihrem Tutor für die Abgabe der Programmieraufgabe einen Termin innerhalb des oben genannten Zeitrahmens Die Sprache der Programmieraufgaben ist C oder auch C++, solange der mathematische Kern C-kompatibel bleibt. Die Lösungen müssen auf den Computern des PC-Pools präsentiert werden.