Einführung in die Numerische Mathematik

Sommersemester 2022
Professor Dr. Carsten Burstedde
Tim Griesbach

UNIVERSITÄT BONN

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Donnerstag, 12.05.2022**.

Aufgabe 1. (Differentiation in Banachräumen)

Für Banachräume A und B gilt, dass $d : A \to B$ für $U \subset A$ offen und $u \in U$ (Fréchet-) differenzierbar in u ist, falls eine beschränkte lineare Abbildung $H : A \to B$ existiert, sodass

$$\lim_{||h||_A \to 0} \frac{||d(u+h) - d(u) - Hh||_B}{||h||_A} = 0$$

gilt, wobei $H =: Dd(u)$ auch das Differential von d in u genannt wird.

Seien X, Y und Z Banachräume. Zeigen Sie, dass für die beiden differenzierbaren Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ die folgenden Aussagen gelten.

(a) Für ein beliebiges $h \in X$ gilt

$$\begin{aligned}\forall x \in X : g(f(x+h)) = g(f(x)) &+ Dg(f(x))(Df(x)h \\ &+ R_1 f(x;h)) + R_1 g(f(x); Df(x)h + R_1 f(x;h)),\end{aligned}$$

wobei $R_1 f(x;h)$ das Taylor-Restglied für die Taylor-Entwicklung erster Ordnung der Funktion $f(x+h)$ in dem Punkt x ist. Sie dürfen im Folgenden in der Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass $\lim\limits_{||h||_X \to 0} \frac{||R_1 f(x;h)||_Y}{||h||_X} = 0$ gilt. Sie dürfen ebenfalls verwenden, dass $\lim\limits_{||h||_X \to 0} \frac{||R_1 g(f(x); Df(x)h + R_1 f(x;h))||_Z}{||h||_X} = 0$ gilt.

(b) Folgern Sie mithilfe der Teilaufgabe (a), dass $g \circ f$ differenzierbar ist und

$$\forall x \in X : D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

Seien nun zusätzlich V und W Banachräume. Ferner sei $B : V \times W \to Z$ eine stetige Bilinearform und $\tilde{f} : X \to V$ und $\tilde{g} : X \to W$ differenzierbare Funktionen. Nutzen Sie als Norm auf $V \times W$ $||(v,w)||_{V \times W} := ||v||_V + ||w||_W$.

(c) Zeigen Sie

$$\forall v, \bar{v} \in V \; \forall w, \bar{w} \in W : (DB(v,w))(\bar{v}, \bar{w}) = B(v, \bar{w}) + B(\bar{v}, w).$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass B eine beschränkte Abbildung ist.

(d) Zeigen Sie

$$\forall x \in X \; \forall (v,w) \in X \times X : D(\tilde{f}, \tilde{g})(x) = (D\tilde{f}(x)v, D\tilde{g}(x)w),$$

wobei unter $(\tilde{f}, \tilde{g})$ die Funktion zu verstehen ist, die $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ in der ersten bzw. zweiten Komponente auf das Funktionsargument anwendetet.

(e) Zeigen mithilfe der Teilaufgaben (b), (c) und (d), dass $B \circ (\tilde{f}, \tilde{g}) : X \to V$ differenzierbar ist und

$$\forall x, v \in X : D(B \circ (\tilde{f}, \tilde{g}))(x)v = B(\tilde{f}(x), D\tilde{g}(x)v) + B(D\tilde{f}(x)v, \tilde{g}(x)).$$

Hinweis: Da in dieser Aufgabe die Differenzierbarkeit in Banachräumen gezeigt wird, müssen Sie neben der Linearität des Differentials auch überprüfen, ob es sich bei dem Differential um eine beschränkte Abbildung handelt. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass eine lineare und beschränkte Abbildung auf einem Banachraum stetig ist. Eine lineare Abbildung H ist beschränkt, falls $\exists C > 0\ \forall a \in A : ||Aa||_B \leq C||a||_A$.

(2 + 2 + 2 + 1 + 2 = 9 Punkte)

Aufgabe 2. (BFGS-Formel)

Es gelte die Notation aus der Vorlesung $d_k := x_{k+1} - x_k$ und $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$. Zeigen Sie durch Nachrechnen, dass die BFGS-Formel

$$H_{k+1}^{\mathrm{BFGS}} = H_k + \frac{y_k y_k^\top}{y_k^\top d_k} - \frac{H_k d_k (H_k d_k)^\top}{d_k^\top H_k d_k}$$

die Quasi-Newton-Gleichung erfüllt.

(6 Punkte)

Aufgabe 3. (Störungslemma)

Sei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine reguläre Matrix. Des Weiteren sei $\delta A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine gestörte Matrix mit $||A^{-1}||||\delta A|| < 1$. Hierbei sei $||\cdot||$ eine submultiplikative Matrixnorm. Beweisen Sie, dass dann $A + \delta A$ eine reguläre Matrix ist deren Inverse

$$||(A + \delta A)^{-1}|| \leq \frac{||A^{-1}||}{1 - ||A^{-1}||||\delta A||}$$

erfüllt.

(6 Punkte)