Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 1. Abgabe am **Dienstag vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Symmetrische Matrizen und Eigenwerte)

Symmetrische Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vom Rang 1 lassen sich allgemein durch $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{a}^T$ mit einem Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ beschreiben. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Orthogonalpolynome)

Auf $C([-1,1])$ wird das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ mit den folgenden Polynomen

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

betrachtet.

a) Geben Sie die P_n für $n = 0, \ldots, 4$ in der Monombasis $\{x^j\}$ an.

b) Rechnen Sie nach, dass

$$P_n(1) = 1 \tag{1}$$

$$P_n(-x) = (-1)^n\, P_n(x) \tag{2}$$

$$P_{2n+1}(0) = 0 \tag{3}$$

für $n \geq 0$ ist.

c) Zeigen Sie, dass die $P_n(x)$ orthogonal bezüglich des obigen Skalarproduktes sind.

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{ij}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Biorthogonalität)

Sei X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sei ferner $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ eine beliebige Basis von X und $G = (\langle\phi_i, \phi_j\rangle)_{i,j}$ die zugehörige Gramsche Matrix.
Wie definieren die *duale* Basis zu $\{\phi_i\}$ mittels

$$\begin{bmatrix}\tilde{\phi}_1\\ \vdots \\ \tilde{\phi}_n\end{bmatrix} = G^{-1}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \vdots \\ \phi_n\end{bmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\langle\tilde{\phi}_i, \phi_j\rangle = \delta_{ij}$.

b) Zeigen Sie, dass $f = \sum_{i=1}^{n}\langle f, \tilde{\phi}_i\rangle\phi_i = \sum_{i=1}^{n}\langle f, \phi_i\rangle\tilde{\phi}_i$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Ausgleichsrechnung)

Berechnen Sie die Best–Approximation bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ der Funktionen $f(x) = ax + b$ und $f(x) = ax^2 + bx + c$ an die folgenden Werte:

x	-2	-1	0	1	2
y	44	11	-2	5	32

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Schreiben Sie ein Programm zur Lösung eines Ausgleichsproblems.

- Generieren Sie eine Datenwolke mit n Datenpunkten auf äquidistanten x-Werten aus folgender Funktion

$$y = \pm\sqrt{\frac{r^2 - a(x + \varepsilon_1 - m_x)^2}{b}} + m_y + \varepsilon_2$$

  für $x \in [m_x - \frac{r}{\sqrt{a}} + 0.1, m_x + \frac{r}{\sqrt{a}} - 0.1]$ und folgenden Parametern: $r = 3,\ m_x = 3.2, m_y = 2.9,\ a = 1.9, b = 4.1$. Zur Bestimmung von ε_1 und ε_2 ziehen sie jeweils gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[-0.1, 0.1]$. Erstellen Sie Datenwolken für $n = 10, 30, 100$.

- Schreiben Sie ein Programm, welches die Approximation im quadratischen Mittel folgender Funktion

$$r^2 = c_1(x - m_x)^2 + c_2(y - m_y)^2$$

  an die generierten Daten berechnet. Die Parameter sollen wie folgt gewählt werden $r = 3,\ m_x = 3.2, m_y = 2.9$.

- Visualisieren Sie ihre Ergebnisse in aussagekräftiger Form. Hierzu bieten sich Programme wie Matlab oder GnuPlot an.

Für eventuell zu lösende LGSe ist die Benutzung der in der AlMa erstellten Löser empfohlen.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am 22.10. und 23.10.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.