Übungsblatt 11.

Abgabe am **Dienstag 8.1.13 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Gauß– Tschebyscheff Quadratur)

Für die Gewichtsfunktion $1/\sqrt{1-t^2}$ auf $[-1,1]$ sind die Tschebyscheff–Polynome T_k orthogonal, da

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \begin{cases} \pi & \text{falls } k=j=0 \\ \pi/2 & \text{falls } k=j>0 \\ 0 & \text{falls } k \neq j \end{cases}$$

Die Nullstellen von T_{n+1} sind

$$\tau_{i,n} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \qquad \text{für } i=0,\ldots,n$$

Zeigen Sie, dass die Gewichte der zugehörigen Quadratur für $n>0$ gegeben sind durch

$$\mathfrak{w}_i = \frac{\pi}{n+1} \qquad \text{für } i=0,\ldots,n$$

und damit gleichverteilt sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Gauss–Quadratur)

Zu berechnen ist für das Intervall $[-1,1]$ folgendes Integral

$$I[f] = \int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\,dx,$$

die Gewichtsfunktion $\omega(x) = 1-x^2 \geq 0$ und das innere Produkt $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega(x)\,dx$.

a) Von welchem Orthogonalpolynom müssen die Nullstellen berechnet werden? (Hinweis: Wiederholungszettel)

b) Wie lautet die 3–Term–Rekursion?

c) Zeigen Sie die 3–Term–Rekursion

$$p_{n+1}(t) = tp_n(t) - \beta_n^2 p_{n-1}(t)$$

und bestimmen Sie β_n. für die Polynome $p_n(t) \in P_{n,1}$, wobei $P_{n,1}$ die Polynome mit führenden Koeffizienten 1 bezeichnet.

d) Von welcher Tridiagonalmatrix sind die Eigenwerte zu bestimmen?

e) Bestimme daraus die 2–stufige Formel.

f) Berechne für $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ den Fehler für $n = 1, 2, \ldots$.

g) Für welche n ist der Fehler $< 10^{-10}$?

(10 Punkte)

Aufgabe 3. (Integralberechnung)

Berechnen Sie das Bereichsintegral $\int\limits_B f(x,y)\, db$!

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$; B wird begrenzt durch $y = 0$, $y = x$, $x = 1$.
2. $f(x,y) = e^{x+y}$; B wird begrenzt durch $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.
3. $f(x,y) = xy$; B wird von dem über der Strecke $0 \le x \le 1$, $y = 0$ errichteten gleichseitigen Dreieck begrenzt.
4. $f(x,y) = xy$; B wird begrenzt durch $y^2 = 2x$, $x = 2$.
5. $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$; B sei das Dreieck A(1,1), B(1,2), C(2,2).

(10 Punkte)

Aufgabe 4. (Zusatzaufgabe)

Zeigen Sie Lemma 4.5 aus der Vorlesung:
Es sei $a < x_1 \le x_2 \le x_n < b$, $g \in C^n[a,b]$ und $\phi \in P_{n-1}$ das Interpolationspolynom mit

$$\phi^{(d_i)}(x_i) = g_i^{(d_i)}(x_i) \quad \text{mit } d_i = \max\{j \in \mathbb{N} : x_i = x_{i-j}\} \tag{1}$$

Dann gibt es genau ein $\phi \in P_{n-1}$, welches (1) erfüllt. Für dieses gilt die Interpolationsfehlerabschätzung

$$\phi(t) - g(t) = \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!} E^x(t) \quad \text{mit } E^x(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - x_i) \quad \forall t \tag{2}$$

mit einem $\xi \in [a,b]$.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Integration)

Implementieren Sie anhand der in der Vorlesung vorgestellten Verfahren folgende Routinen:

a) Gauss–Legendre Quadratur

b) Gauss–Tschebyscheff Quadratur

c) Gauss–Hermite Quadratur

Zur eventuellen Berechnung der Stützstellen kann der bereits implementierte QR–Algorithmus verwendet werden.
Testen Sie ihre Routinen an folgenden Funktionen:

a) $\int\limits_{-2}^{2} x^2 dx$

b) $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{|x|} dx$

c) $\int\limits_{-10}^{10} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$
(Näherungsweise kann hier $\sqrt{2\pi}$ als exakter Wert des Integrals benutzt werden.)

d) $\int\limits_{-4}^{4} \frac{1}{x+d} dx$ für $d = 2, 1.5, 1.25, \ldots, 1 + \frac{1}{2^i}$

Im Falle der Hermite–Quadratur sind an den linken und rechten Stützstellen die erste und zweite Ableitung auszurechnen und vorzugeben. Plotten Sie die Konvergenz in Abhängigkeit der Anzahl der Stützstellen. Interpretieren Sie das Verhalten.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am **17.1. und 18.1.2012 (Do u. Fr)**. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.

Frohe Weihnachten und ein gesundes Jahr 2013!