Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. S. Beuchler
Markus Burkow

Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag 15.1.13 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Transformation)

- Bestimmen Sie die affine Abbildung, welche des Standarddreieck $(0,0),(0,1)$ und $(1,0)$ auf das Dreieck D mit den Eckpunkten $(2,1),(6,5),(3,4)$ abbildet.
  Berechnen Sie anschließend
  $$\int_D x^2 + y^2$$
- Gegeben sei ein Parallelogramm K durch $A(1,1), B(2,-1), C(4,2)$ und $D(5,0)$. Bestimmen Sie ebenfalls durch eine geeignete Transformation auf $(0,0),(0,1),(1,0)$ und $(1,1)$ folgendes Integral
  $$\int_K x + y$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Gauss-Legendre-Quadratur)

Es seien $f \in C^{2n}([-1,1])$ und $Q_n^{[-1,1]}$ die n-Punkte Gauß–Legendre–Quadraturformel $Q_n^{[-1,1]}(f) := \sum_{i=1}^n \omega_i f(\xi_i)$, dann gilt Fehlerabschätzung

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n^{[-1,1]}(f) \right| \leq c \frac{2^{-2n}}{(2n)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)|, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie im Falle $f \in C^{2n}([0,h])$ die Fehlerabschätzung für die auf das Intervall $[0,h]$ transformierte Gauß–Legendre–Quadraturformel

$$Q_n^{[0,h]}(f) := \sum_{i=1}^{n} h\omega_i/2 f\big(h(\xi_i+1)/2\big).$$

Hinweis: Vermittels der Transformation $\psi : [-1,1] \mapsto [0,h]$, $\psi(x) = h(x+1)/2$, folgt

$$\left| \int_0^h f(x)dx - Q_n^{[0,h]}(f) \right| = h/2 \left| \int_{-1}^{1} (f\circ\psi)(x)dx - Q_n^{[-1,1]}(f\circ\psi) \right|.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Dreidimensionale Gauss–Legendre–Quadratur)

Leiten Sie analog zur Vorlesung die Fehlerabschätzung für die dreidimensionale Gauss–Quadratur

$$Q_n^{3D}(f) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_i, x_j, x_k) w_i w_j w_k$$

auf dem dreidimensionalen Würfel $[-1,1]^3$ her.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Duffy–Transformation)

Berechnen Sie mittels der Duffy–Transformation auf $[-1,1]^3$ die Quadraturformeln für

- das Prisma $(-1,-1,-1),(1,-1,-1),(0,1,-1),(-1,-1,1),(1,-1,1)$ und $(0,1,1)$.
- den Tetraeder $(-1,-1,-1),(1,-1,-1),(0,1,-1)$ und $(0,0,1)$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Monte–Carlo Integration)

Implementieren Sie eine Routine, welche mittels Monte–Carlo Integration unten stehende Integrale berechnet.

a) $\int\limits_{-2}^{2} x^2 dx$

b) $\int\limits_{[0,1]^3} \|\mathbf{x}\|_2 dx$

c) $\int\limits_{-10}^{10} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$
(Näherungsweise kann hier $\sqrt{2\pi}$ als exakter Wert des Integrals benutzt werden.)

d) $\int\limits_{[-4,4]^d} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2}$ für $d = 2, 4, 8$

Berechnen Sie die Integrale mit den Stichprobenumfängen: $N = 100, 1000, \ldots, 10^7$. Plotten Sie den Fehler, falls keine analytische Lösung bekannt, die Differenz zur feinsten Lösung $|I_N - I_{N_{max}}|_2$.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am **17.1. und 18.1.2012 (Do u. Fr)**. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.