Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. S. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 13.

Abgabe am **Dienstag 22.1.13 vor der Vorlesung**.

Aufgabe 1. (Mittelpunktsregel für Tetraeder)

Gegeben Sei der Tetraeder T mit $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0)$ und $(0,0,1)$. Berechnen Sie die Gauß–Legendre–Quadratur das Gewicht und die Koordinaten des Stützpunktes für die Mittelpunktsregel für T aus.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Gauss–Legendre–Quadratur für Dreiecke)

Gegeben Sei das Dreieck D durch $(-1,0), (1,0)$ und $(0,1)$. Berechnen Sie für $n = 3$ die Gewichte ω_{ij} und die Stützstellen (x_i, y_i) für die Gauss–Legendre–Quadratur auf dem Dreieck D, so dass diese exakt für alle Polynome $f \in P_n$ sind.
(Tipp: Duffy–Transformation)

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Stern–Diskrepanz)

Die Stern-Diskrepanz eines Punktevektors X ist definiert als

$$D_N(X) := \sup_{Q \subset [0,1]^d} \left| \frac{\#\{i | xi \in Q\}}{N} - vol(Q) \right|$$

wobei Q ein Quader ist, der im Nullpunkt verankert ist, das heißt $Q = [0, b_1] \times \cdots \times [0, b_d]$ für $b_i \in (0,1], i = 1, \ldots d$,

a) Verteilen Sie 2 Punkte x_1, x_2 auf das Intervall $[0,1]$ so, dass die Stern-Diskrepanz für $d = 1$ minimal wird.

b) Bestimmen Sie die Stern-Diskrepanz von $X = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ für $d = 2$.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (hierarchischer Interpoland)

Gegeben sei die Parabel $f(x) = 1 - 4(x - 0.5)^2$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $\{\beta_{\ell,k}\}$ des hierarchischen Interpolanden

$$f_j(x) = \sum_{\ell=0}^{j} \sum_{k \in \nabla_\ell} \beta_{\ell,k} \varphi_{\ell,k}(x)$$

aus dem Raum der stückweise linearen Funktionen

$$S_{2,x} = \left\{ f \in C([0,1]) : f\big|_{[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]} \in P_1 \text{ für alle } k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1 \right\}.$$

(5 Punkte)