Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 2. Abgabe am **Dienstag vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Singulärwertzerlegung)

Berechnen Sie für folgende Matrix die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^*$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Pseudoinverse, Singulärwertzerlegung)

a) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lässt sich als $A = U\Sigma V$ mit $U \in O(m)$ und $V \in O(n)$ schreiben, wobei $O(\cdot)$ die orthogonale Gruppe bezeichnet. Weiter hat $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Form

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|c} s_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

(Singulärwertzerlegung, singular value decomposition, SVD). Dabei ist $0 \leq k \leq \min\{m,n\}$, und die Singulärwerte $s_1 \geq \ldots \geq s_k > 0$ sind eindeutig bestimmt. Definiere nun $\tilde{\Sigma}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ durch

$$\tilde{\Sigma} := \left(\begin{array}{ccc|c} s_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & s_k^{-1} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

und $B := V^T\tilde{\Sigma}U^T$. Zeigen Sie, daß B die Pseudoinverse von A ist, indem Sie die Penrose-Axiome

(i) $A^\dagger A = (A^\dagger A)^T$, $AA^\dagger = (AA^\dagger)^T$,

(ii) $AA^\dagger A = A$, $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$,

überprüfen. Zeigen Sie dazu zuerst, dass $\tilde{\Sigma}$ die Pseudoinverse von Σ ist.

b) Zeigen Sie, dass zwei beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ genau dann dieselben Singulärwerte haben, wenn $U \in O(m)$ und $V \in O(n)$ existieren, so dass $A = UBV$ gilt.

c) Geben Sie ein Beispiel von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ an, um zu zeigen, dass im allgemeinen $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$ gilt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Orthoprojektor)

Eine quadratische Matrix $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$ heißt Projektor, falls $P^2 = P$. Sie heißt Orthoprojektor, falls zusätzlich noch $P^T = P$ gilt.
Es sei $n \in \mathbb{R}^d$ ein Spaltenvektor mit $n^T n = 1$. Man zeige, dass die Matrix $Q = I - nn^T$ ein Orthoprojektor ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (orthogonale Matrizen und Rotationen)

Zeigen Sie, dass für jedes $\phi \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

orthogonal ist. Gibt es noch andere orthogonale (2×2)–Matrizen? Beispiel?

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. Implementieren Sie das klassische Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren (s. Lineare Algebra).
Testen sie dieses Verfahren anhand der Spaltenvektoren der aus der Vorlesung bekannten Hilbertmatrix, für $n = 10, 20, 30$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am 22.10. und 23.10.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.