



Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. S. Beuchler
Markus Burkow



Übungsblatt 3. Abgabe am Dienstag vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr).

Aufgabe 1. (QR-Zerlegung)

Zeigen Sie, dass zwei QR-Zerlegung bis auf eine unitäre Diagonalmatrix D eindeutig bestimmt sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (QR-Zerlegung II)

Die zum Vektor $u \in \mathbb{R}^n \neq 0$ zugehörige Householder-Transformationsmatrix sei $T = I - 2 \frac{uu^T}{u^T u}$.

(a) Geben Sie die Eigenwerte von T an.

(b) Gegeben sei $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie die Matrix T an, mit der die erste Spalte von TC zu einem Vielfachen von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird.

(c) Berechnen Sie allgemein, die Eigenwerte einer hermitesch unitären Matrix.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (LR- und QR-Zerlegung)

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung $A = L \cdot R$ von A .

b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung $A = Q \cdot R$ von A mittels Householder-Transformationen.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Pseudo-Inverse)

Man bestimme die Pseudoinverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (QR-Zerlegung und Ausgleichsproblem)

- a) Implementieren Sie das Householder-Verfahren zur Berechnung einer QR-Zerlegung und lassen Sie die Anzahl der Rechenschritte zählen. Prüfen Sie experimentell anhand von Hilbertmatrizen, dass der asymptotische Aufwand $\frac{4}{3}n^3$ beträgt.
- b) Aus der Physik ist bekannt, dass Körper, die nur der Schwerkraft ausgesetzt sind, in Parabeln fliegen. Ein Körper habe die Anfangsgeschwindigkeit $v = (v_x, v_y)$ und befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Punkt 0. Zum Zeitpunkt $t > 0$ befindet er sich dann am Ort $x = v_x t$, $y = v_y t - \frac{1}{2}gt^2$, wobei g die Erdbeschleunigung ist. In einer Versuchsreihe wurden folgende Werte gemessen:

i	1	2	3	4	5	6	7
$t_i[s]$	0.1	0.4	0.5	0.9	1.0	1.2	2.0
$x_i[m]$	0.71	2.85	3.54	6.39	7.09	8.54	14.35
$y_i[m]$	0.96	3.26	3.82	5.11	5.20	5.05	0.58

Formulieren Sie ein geeignetes lineares Ausgleichsproblem und lösen Sie dieses, um die Geschwindigkeit v_y und die Erdbeschleunigung g zu bestimmen. Erstellen Sie ein Schaubild, in dem die Messwerte und die berechnete Parabel aufgeführt sind. Bis zu welcher Genauigkeit ist es sinnvoll, die Ergebnisse anzugeben? Welche Modellfehler, Datenfehler und Messfehler treten bei diesem Versuch auf?

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am 05.11. und 06.11.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.