Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. S. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 4. Abgabe am **Dienstag vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Orthonormalpolynome)

Zeigen Sie, dass die Orthonormalpolynome

$$q_j = \frac{p_j(x)}{\sqrt{\langle p_j, p_j \rangle}}$$

der Drei-Term-Rekursion

$$\beta_j q_j(x) = (x - \alpha_{j-1}) q_{j-1}(x) - \beta_{j-1} q_{j-2}(x)$$

mit

$$\alpha_n = \frac{\langle x p_n, p_n \rangle_\omega}{\langle p_n, p_n \rangle_\omega}, \quad \beta_n^2 = \frac{\langle p_n, p_n \rangle_\omega}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle_\omega} > 0$$

genügen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Erweitertes lineares Ausgleichsproblem)

Ein lineares Ausgleichsproblem

$$\|b - Ax\|_2 \to \min \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

soll um eine neue Gleichung $a^* x = \beta$ erweitert werden. Die Lösung des ursprünglichen Problems ist über eine QR–Zerlegung $A = QR$ berechnet worden.
Zeigen Sie, dass die Lösung des erweiterten $(m+1) \times n$-dimensionalen Ausgleichsproblems ebenso eine Lösung des $(n+1) \times n$-dimensionalen Problems

$$\left\| \begin{bmatrix} \beta \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^* \\ R \end{bmatrix} x \right\|_2 \to \min \qquad \texttt{mit } c = Q^* b$$

darstellt.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Hessenberg–Matrizen)

Sei A eine hermitesche Matrix und Q eine unitäre Matrix.
Zeigen Sie, dass die Hessenberg–Form $H = Q^* A Q$ der Matrix A eine Tridiagonalmatrix ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (QR-Zerlegung)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung $A = QR$ der Matrix A mit Hilfe von Givens-Rotationen.

b) Zeigen Sie, dass die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eindeutig ist, wenn man fordert, dass die Diagonalelemente von R reell und positiv sind.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (QR–Verfahren)

Gegeben sei eine symmetrische Tridiagonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Man implementiere den **QR** Zerlegung von A.
Die dabei auftretenden orthogonalen Transformationen sind sinnvollerweise mit *Givens-Rotationen* durchzuführen. Man teste das Programm an den folgenden Beispielen :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 8}$$

und

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & & & & \\ 7 & 2 & 6 & & & \\ & 6 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 2 & \\ & & & 2 & 7 & 1 \\ & & & & 1 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8\times 8}.$$

Die auftretende Matrix soll effizient gespeichert werden, dafür sollen lediglich die Haupt- und Nebendiagonale gespeichert werden.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am 05.11. und 06.11.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.