Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. S. Beuchler
Markus Burkow

Übungsblatt 5. Abgabe am **Dienstag vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (Hermite–Polynome)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ werden die *Hermite–Polynome* durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

definiert. Zeigen Sie:

a) Die Hermite–Polynome genügen für $n \in \mathbb{N}$ der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

mit $H_0(x) = 1$ und $H_1(x) = 2x$. (Damit ist klar, dass H_n ein Polynom vom Grad n ist.)

Hinweis: Verwenden Sie die Produktregel für die n-te Ableitung,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

b) Für die Ableitung von H_n gilt $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

c) Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

sind die Orthonormalpolynome zum Gewicht $\omega(x) = e^{-x^2}$ auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$.

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Orthonormale Fourierbasen und Eigenschaften)

Zu $f, g \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f, g \in L_2[0, 2\pi]$, sei $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\bar{g}(x)dx$ gegeben. Sei $e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Zeigen Sie:

a) Für das Funktionensystem $B = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx |\ k = 1, 2, \dots\}$ gilt $a, b \in B \Rightarrow \langle a, b\rangle = \delta_{ab}$.

b) Sei nun $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π–periodisch. Dann bezeichnet $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e_k(x)$ mit $f_k = \langle f, e_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$ die *Fourierreihe* zu f.

Zeigen Sie: Ist f achsensymmetrisch[1] um $x = \pi$, so ist $f_k = f_{-k}$ und läßt sich ohne Sinusanteile ausdrücken.

Ist f punktsymmetrisch[2] um $x = \pi$, so ist $f_{-k} = -f_k$ und läßt sich ohne Kosinusanteile ausdrücken.

[1] D.h. $f(\pi - x) = f(\pi + x)$.
[2] D.h. $f(\pi + x) = -f(\pi - x)$.

c) Sei f reellwertig. Zeigen Sie (f achsensymmetrisch um $\pi \Rightarrow f_k \in \mathbb{R}$) und ($f$ punktsymmetrisch um $\pi \Rightarrow f_k$ rein imaginär).

d) Wir schreiben $f_k = C\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=-m}^{m} f_k e^{ikx} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k \cos kx + \sum_{k=1}^{m} B_k \sin kx$$

mit $A_k = 2C\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\ dx$ und $B_k = 2C\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\ dx$ sowie $A_0 = 2f_0$, $A_k = f_k + f_{-k}$ und $B_k = i(f_k - f_{-k})$.

Zeigen Sie auch $f_k = \frac{1}{2}(A_k - iB_k)$ und $f_{-k} = \frac{1}{2}(A_k + iB_k)$ für $k > 0$.

e) Es gilt $(\bar{f})_k = \overline{f_{-k}}$ für alle f.

Für reellwertiges f gilt $f_k = \overline{f_{-k}}$ und für $k > 0$, dass $A_k = 2\mathrm{Re}(f_{-k})$ und $B_k = 2i\,\mathrm{Im}(f_k)$.

Für f mit rein imaginären Werten gilt $f_k = -\overline{f_{-k}}$ und für $k > 0$, dass $A_k = 2\,\mathrm{Im}(f_{-k})$ und $B_k = 2i\,\mathrm{Re}(f_k)$.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Poisson–Problem)

Gegeben Sei das folgende Poisson–Problem auf einem Kreis mit dem Radius $R = 1$

$$\triangle u = 0, \qquad \text{in} \quad \Omega = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{1}$$

$$u = 1, \qquad \text{auf} \quad \Gamma = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \tag{2}$$

.

a) Man zeige, dass bei Verwendung von Polarkoordinaten

$$x = r \cdot \cos\phi,\ y = r \cdot \sin\phi, \quad \text{wobei } r \in [0,1] \text{ und } \phi \in [0, 2\pi).$$

Gleichung (1) in die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \tag{3}$$

übergeht.

b) Mit Hilfe des Separationsansatzes

$$u(\theta, r) = A(\theta)B(r)$$

leite man gewöhnliche Differentialgleichungen für A und B her.

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Orthogonalpolynome)

Die Polynome $U_n(x), \quad n \in \mathbb{N}_0$ seien definiert durch:

$$U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \left(\left(x + \sqrt{x^2-1} \right)^{n+1} - \left(x - \sqrt{x^2-1} \right)^{n+1} \right)$$

für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k} \left(x^2-1\right)^k$

b) $U_n(x)$ genügt der Drei–Term–Rekursion

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

c)

$$U_n(\cos(\phi)) = \frac{\sin((n+1)\phi)}{\sin(\phi)} \quad \text{für } \sin(\phi) \neq 0$$

d)

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } m = n \end{cases}$$

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Drei–Term Rekursion)

Implementieren Sie eine Routine die mit Hilfe der in der Vorlesung vorgestellten Drei–Term Rekursion folgende Polynome an der Stelle x_n auswertet.

a) Jacobi–Polynome mit wählbaren α und β auf $(-1, 1)$.

b) Tschebischeff–Polynome (1.Art) auf $(-1, 1)$.

c) Laguerre–Polynome auf $(0.1, 100)$.

Verfizieren Sie ihre Ergebnisse, indem Sie die Auswertungen für $n = 4, 10, 20, 50, 100$ auf dem Intervall (a, b) an $m = 500$ äquidistanten Stellen plotten. Im Falle der Jacobi–Polynome sollen folgende Beispiele berechnet werden $\alpha = \beta = 0$, $\alpha = \beta = 0.5$ sowie $\alpha = 4$ und $\beta = 1$ in weiteren Beispielen können α und β nach belieben gewählt werden. Hinweis zu den zu verwendenden Rekursions–Formeln:

- Jacobi: $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ und $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)x)$

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = {} & \frac{(2n+\alpha+\beta-1)\left((2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x + \alpha^2 - \beta^2\right)}{2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) \\ & - \frac{2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}{2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \end{aligned}$$

- Tschebyscheff: s. Skript
- Laguerre: $L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x,$
  $n \cdot L_n(x) = (2n-1-x)L_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x) \quad \text{für } n \geq 2$

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am 19.11. und 20.11.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.