# Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. S. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

## Übungsblatt 6. Abgabe am **Dienstag vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

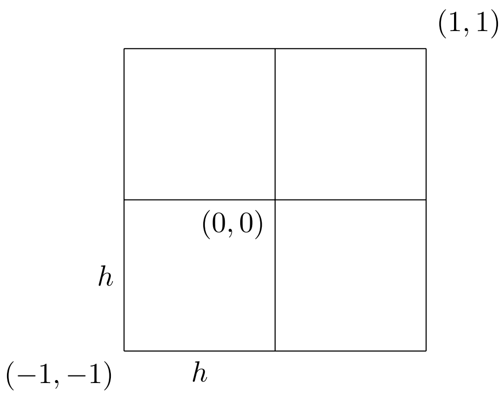
**Aufgabe 1.** (Finite Elemente)

Wir betrachten den 2D–Laplace–Operator $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ auf dem Referenz–Viereck und betrachten

$$a(u,v) = \int\int \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\, dxdy$$

Als Basisfunktionen werden die Tensorprodukte der klassischen 1D stückweise linearen finiten Elemente $\phi_i(x)$ gewählt. Im Folgenden entsprechen $i, j$ den Koordinaten
Für $u = \phi_0(x)\phi_0(y)$ und $v = \phi_i(x)\phi_j(y) \quad i, j \in \{-1, 0, 1\}$ rechne man mit Hilfe analytischer Integration nach, dass

$$a(u,v) = \begin{cases} \frac{8}{3} & (i,j) = (0,0) \\ -\frac{1}{3} & \text{sonst} \end{cases}$$




(5 Punkte)

**Aufgabe 2.** (Schwache Lösung)

Sei $x \in [0,1]$. Gegeben sei folgendes Problem:

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{mit } f(x) \in C^\infty \\ u'(0) &= 0 \\ u'(1) &= g \neq 0 \end{aligned}$$

a) Geben Sie die schwache Formulierung an.

b) Berechnen Sie für $c(x) = 1$ die zu den eindimensionalen stückweise linearen Elementen gehörende Finite–Elemente Matrix $G_h$.

**Aufgabe 3.** (Zusatzaufgabe: Schwache Lösung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer rektifizierbaren Oberfläche $\Gamma$ begrenzt wird.

a) Wir betrachten die homogene Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass jede Lösung $u \in C^2(\Omega)$ von (1) die sogenannte schwache Form erfüllt:

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0 \quad \text{für alle } v \in C_0^1(\Omega). \tag{2}$$

b) Umgekehrt kann man auch folgern, dass jede Lösung $u \in C_0^2(\Omega)$ von (2) auch eine Lösung für die homogene Poisson-Gleichung ist. Zeigen Sie dies für den Fall $\Omega \subset \mathbb{R}$.

c) Wir betrachten nun das Funktional

$$I(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad \text{(Dirichlet-Integral)}$$

und die dazugehörige Variationsaufgabe

$$\min_{u \in C_0^1(\Omega)} I(u). \tag{3}$$

Beweisen Sie, dass jede Lösung von (2) auch eine Lösung der Variationsaufgabe ist, und umgekehrt, dass jede Lösung von (3) auch eine Lösung der schwachen Form ist.

d) Man leite die schwache Form für

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

.

(5 zusätzliche Punkte)

**Aufgabe 4.** (CG–Verfahren)

Beweisen Sie Lemma 2.1 aus der Vorlesung:

- Für das durch
$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle$$
definierte Funktional $\Phi$ gelten die folgenden Aussagen:
$$\Phi(x^*) - \Phi(x) = \frac{1}{2}\langle x - x^*, x - x^*\rangle_A \geq 0,$$
d.h. das Funktional besitzt ein eindeutig bestimmtes Minimum bei $x = x^*$.

- Es seien $y \in \mathbb{R}^n$ und der Teilraum $M \subset \mathbb{R}^n$ gegeben sowie $y + M = \{y + v, v \in M \subset \mathbb{R}^n\}$ eine affine Mannigfaltigkeit. Für $x \in y + M$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:
  - $$x = \text{argmin}_{v \in y+M} \Phi(v).$$
  - $$\langle x - x^*, v\rangle_A = 0 \quad \forall v \in M.$$

–

$$\| x - x^* \|_A < \| z - x^* \|_A \quad \forall z \in y + M, z \neq x.$$

- Es gilt

$$\operatorname{grad} \Phi(x) = Ax - b.$$

(5 Punkte)

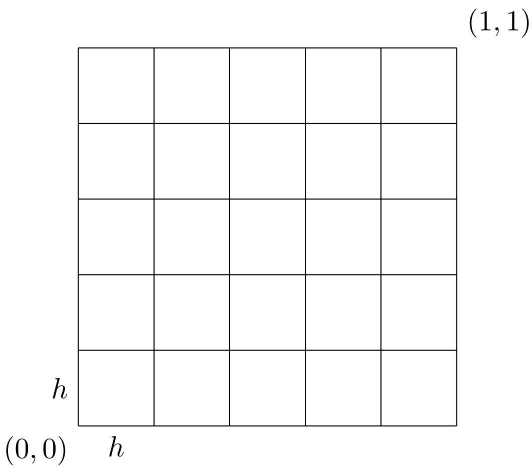
**Programmieraufgabe 1.** (Finite Elemente)

**Achtung**: In der kommenden Woche wird es keine weitere Programmieraufgabe geben. Somit stehen zur Lösung dieser Programmieraufgabe zwei Wochen zur Verfügung. Diese Programmieraufgabe wird auch wie zwei Aufgaben bewertet.
**(Doppelte Punkte!)**

Gegeben sei das 2D-Poisson-Problem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 1 \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir betrachten das Problem auf folgendem Vierecksgitter:




Als Basisfunktionen werden die Tensorprodukte der klassischen 1D stückweise linearen finiten Elemente gewählt.

Konstruieren Sie die entsprechenden Einträge der Gram'schen Matrix (Steifigkeitsmatrix) $G_h$ und der rechten Seite anhand analytischer Integration. Schreiben Sie unter Ausnutzung der Aufgabe 1 $G_h$ auf.

Implementieren Sie eine Routine zur Multiplikation von $G_h \underline{x}$ ohne dabei die Matrix explizit aufzustellen. Nach Diskretisierung entsteht ein lineares Gleichungssystem, welches mittels CG-Verfahren gelöst werden soll. Implementieren Sie das in der Vorlesung vorgestellte CG-Verfahren zur Lösung der entstehenden Gleichungssysteme.

Als Schrittweiten verwenden Sie $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$. Plotten Sie die Lösungen mit einem Programm ihrer Wahl. Nutzen Sie zusätzlich das aus der AlMA II bekannte Jacobi–Verfahren zur Lösung des entstehenden LGS. Vergleichen sie mit dem CG–Verfahren und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am 03.12. und 04.12.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.