Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. S. Beuchler
Markus Burkow

universitätbonn

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag 27.11.12 vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (CG-Verfahren)

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer reellen symmetrisch positiv definiten Matrix A soll dem Verfahren der konjugierten Gradienten gelöst werden. Hierbei seien x^k die Näherungslösungen, q^k die (konjugierten) Suchrichtungen und r^k die Residuen (wobei $r^{k-1} \neq 0$ gelte) in Iteration k. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des CG-Verfahrens:

a) $q^k \neq 0$

b) $\text{span}\{r^0, r^1, ..., r^{k-1}\} = \text{span}\{q^0, q^1, ..., q^{k-1}\}$

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (CG-Verfahren)

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Iterierten x_1, x_2 und x_3 des CG-Verfahrens zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für den Startwert x_0.

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (CG-Verfahren für semidefinite Matrizen)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit einer symmetrisch semidefiniten Matrix A und b im Bild von A.
Beweisen Sie, dass alle im Laufe des cg-Verfahrens konstruierten Suchrichtungen ebenfalls im Bild von A liegen. Folgern Sie, dass das CG-Verfahren anwendbar ist und das x eine Lösung des Problems darstellt. Gilt dies auch für das vorkonditionierte CG-Verfahren? Begründung?

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Vorkonditioniertes CG-Verfahren)

Das CG-Verfahren soll durch eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vorkonditioniert werden. Sei $C = LL^T$ die Cholesky–Zerlegung der Matrix C.
Dann ist das System $C^{-1}Ax = C^{-1}b$ äquivalent zu

$$L^{-1}AL^{-\top}z = L^{-1}b, \quad x = L^{-\top}z.$$

Die Matrix $M = L^{-1}AL^{-\top}$ ist wieder spd. Weiterhin sei

$$\Psi(z) = \frac{1}{2}\langle Mz, z\rangle - \langle z, L^{-1}b\rangle$$

das neue Funktional, vgl. Vorlesung. Dann gilt offenbar

$$\Psi(z) = \Phi(x) \quad \text{und } \nabla\Psi(z) = L^{-1}AL^{-\top}z - L^{-1}b.$$

Beweisen Sie, die unten stehenden Beziehungen, welche sich aus der Anwendung des CG-Verfahrens auf $L^{-1}AL^{-\top}z = L^{-1}b$ ergeben. Wir bezeichnen die Suchrichtungen, den Fehler und das Residuum für z mit $q_z^{(k)}$, $e_z^{(k)}$ bzw. $r_z^{(k)}$ sowie $q^{(k)}$, $e^{(k)}$ bzw. $r^{(k)}$ die entsprechenden Größen für $x = L^{-\top}z$.

a) $q^{(k)} = L^{-\top}q_z^{(k)}$

b) $e^{(k)} = L^{-\top}e_z^{(k)}$

c) $r^{(k)} = Ae^{(k)} = AL^{-\top}e_z^{(k)} = Lr_z^{(k)}$

d) $q^{(k+1)} = \beta_k q^{(k)} - w^{(k+1)}$ mit $\beta_k = \frac{\langle w^{(k+1)}, Aq^{(k)}\rangle}{\langle q^{(k)}, Aq^{(k)}\rangle}$ und $w^{(k+1)} = C^{-1}r^{(k+1)}$ als das vorkonditionierte Residuum.

e) $\langle w^{(j)}, r^{(k)}\rangle = 0$ für $j \neq k$ $\qquad$ (C^{-1} Orthogonalität)

(5 Punkte)