Einführung in die Numerische Mathematik

Wintersemester 2012/2013
Prof. Dr. S. Beuchler
Markus Burkow

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag 04.12.12 vor der Vorlesung (bis 10:15 Uhr)**.

Aufgabe 1. (PCG–Verfahren)

Es sei (λ, x) ein Eigenpaar des verallgemeinerten Eigenwertproblems. Seien A und C symmetrisch positiv definit und $C = LL^T$ die Cholesky–Zerlegung von C.

$$Ax = \lambda Cx \qquad (*)$$

mit $x \neq 0$.

a) Man zeige: (λ, x) ist Eigenpaar von $Av = \lambda Cv$ genau dann wenn (λ, z) Eigenpaar von $Mz = \lambda z$ mit $M = L^{-1}AL^{-T}, \quad z = L^T x$ ist.

b) Zeigen Sie, dass das Problem $(*)$ n-verschiedene C-orthogonale Eigenvektoren $v_i, i = 1, \ldots, n$ mit $Av_i = \lambda_i C v_i$ und $(v_i, Cv_j) = \delta_{ij}$ besitzt.

c) Zeigen Sie:

$$\lambda_1 \langle Cv, v\rangle \leq \langle Av, v\rangle \leq \lambda_n \langle Cv, v\rangle \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

und dass die Gleichheit auch angenommen wird.

d) Falls

$$c\langle Cv, v\rangle \leq \langle Av, v\rangle \leq \overline{c}\langle Cv, v\rangle \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

dann ist $c \leq \lambda_1$ und $\overline{c} \leq \lambda_n$.

e) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $C^{-1}A$ gerade $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $(*)$ sind.

Bemerkung: Alternative: Statt $C = L^T L$ kann auch $C = C^{\frac{1}{2}} C^{\frac{1}{2}}$ benutzt werden. Der Beweis verläuft analog.

(5 Punkte)

Aufgabe 2. (Krylovraum)

a) Zeigen Sie, dass die Iterierten des Richardson-Verfahrens in einem Krylovraum liegen.

b) Liegen die Iterierten des Jacobi-Verfahrens für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

in einem Krylovraum? Begründung?

c) Kann für eine allgemeine Matrix A das LGS $Ax = b$ derart modifiziert werden, dass die Iterierten des Jacobi-Verfahrens in einem Krylovraum liegen?

(5 Punkte)

Aufgabe 3. (Konvergenz bei isolierten Eigenwerten)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spd mit $\sigma(A) \subset [a,d] \cup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$. Hierbei sei $m < N$ und $0 < a < d < \lambda_m \leq \ldots \leq \lambda_1$.

a) Dann gilt für den Fehler nach $k \geq m$ Schritten des CG-Verfahrens die Abschätzung

$$\|x - x^k\|_2 \leq 2\sqrt{d/a}q^{k-m}\|x\|_2 \qquad q = \frac{\sqrt{d/a}-1}{\sqrt{d/a}+1}$$

Tipp: Beweis des Satzes 2.5 aus der Vorlesung.

b) Zeigen Sie desweiteren:

$$T_k(g(0)) = T_k\left(\frac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1}\right) \geq \frac{1}{2}\eta^k$$

mit

$$\eta = \frac{(\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_1})}{(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1})}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. (Rayleigh–Quotienten)

Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Unter dem **Wertebereich** $\mathcal{W}(A)$ versteht man die Menge aller **Rayleigh-Qoutienten**

$$\frac{x^*Ax}{x^*x},$$

d.h.

$$\mathcal{W}(A) = \left\{\frac{x^*Ax}{x^*x} : x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0\right\} = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, \| x \|_2 \neq 1\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{W}(A)$ ist zusammenhängend.
- Falls A hermitesch ist, dann ist $\mathcal{W}(A) = [\lambda_n, \lambda_1]$, wobei $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ die sortiertem Eigenwerte von A bezeichnen,
- Falls A schiefhermitesch ist, d.h. $A^* - A$, dann ist $\Re(\mathcal{W}(A)) = 0$.

(5 Punkte)

Programmieraufgabe 1. (Vektoriteration)

Unter der Vektoriteration versteht man das folgende Verfahren.

$x = Vektor(m, A, v^{(0)})$

Input:	$A \in \mathbb{C}^{n\times n}, v^{(0)} \in \mathbb{C}^n, m \in \mathbb{N}$	mit $\| v^{(0)} \|_2 = 1$
Output:	$x \in \mathbb{C}^n$	mit x Approximation an den betragsgrößten Eigenwert von A

for $k = 1$ To m **do**
    $z^{(k+1)} = Av^{(k)}$
    $v^{(k+1)} = \frac{z^{(k+1)}}{\|z^{(k+1)}\|_2}$.
end for
Setze $x = v^{(m+1)}$.

Implementieren Sie die Vektoriteration zur Berechnung des betragsgrößten Eigenwertes. Testen Sie ihr Programm an folgenden Matrizen:

a) $A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ für $N = 16, 32, 128, 512$

b)

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & & \\ -I & T & -I & \\ & -I & T & -I \\ & & -I & T \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad T = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$$

und I die 4×4-Identität ist.

c)

$$K_h = \frac{1}{h^2} \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
8 & -1 & & & -1 & -1 & & & & & & & & & & \\
-1 & \ddots & \ddots & & -1 & \ddots & \ddots & & & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & -1 & & \ddots & \ddots & -1 & & & & & & & & \\
& & -1 & 8 & & & 1 & -1 & & & & & & & & \\
\hline
-1 & -1 & & & 8 & -1 & & & \ddots & \ddots & & & & & & \\
-1 & \ddots & \ddots & & -1 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
& \ddots & \ddots & -1 & & \ddots & \ddots & -1 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
& & 1 & -1 & & & -1 & 8 & & & \ddots & \ddots & & & & \\
\hline
& & & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & & & -1 & -1 & & \\
& & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & -1 & \ddots & \ddots & \\
& & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & -1 \\
& & & & & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & & & 1 & -1 \\
\hline
& & & & & & & & -1 & -1 & & & 8 & -1 & & \\
& & & & & & & & -1 & \ddots & \ddots & & -1 & \ddots & \ddots & \\
& & & & & & & & & \ddots & \ddots & -1 & & \ddots & \ddots & -1 \\
& & & & & & & & & & 1 & -1 & & & -1 & 8
\end{array} \right]$$

Die Matrix K_h besteht aus $(N-1)^2$ Teilmatrizen, die jeweils $(N-1) \times (N-1)$-Matrizen sind. (s. Programmieraufgabe von Zettel 6)

Die Abgabe der Programmieraufgaben erfolgt in den CIP-Pools am 17.12. und 18.12.2012. Die Listen für die Anmeldung zu den Abgabe-Terminen hängen in der kommenden Woche aus.