Repetitorium zur Ingenieur-Mathematik I, WS 2012/13

Aufgabe 1: Bestimmen Sie das quadratische Polynom, auf dessen Graph die Punkte $(-1,4)$, $(0,1)$, $(2,7)$ liegen.

Aufgabe 2:

a) Wann ist eine Folge *konvergent* (Definition)?

b) Definieren Sie den Begriff *Cauchy-Folge*.

c) Geben Sie zwei Beispiele für konvergente Folgen und deren jeweilige Grenzwerte an.

d) Geben Sie zwei Beispiele für divergente Folgen an.

Aufgabe 3: Skizzieren Sie den Graphen der folgenden Funktion, und schreiben Sie die Funktion unter Verwendung der Betragsfunktion ohne Fallunterscheidung:

$$f(x) := \begin{cases} -x & : \quad x < 0 \\ 0 & : \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -(x-2) & : \quad x > 2 \end{cases}$$

Tipp: Erinnern Sie sich dazu an die Funktion

$$p(x) = x + |x|.$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

Aufgabe 5: Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) $a_n := \frac{3n^2+5n-2}{9n^2+3}$

b) $a_n := \frac{2n^3+3n+1}{4n^3+\sqrt{n}-3}$

Aufgabe 6: Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{4^{n+1}} \end{aligned}$$

definiert. Berechnen Sie die ersten Folgenglieder und stellen Sie dann eine Hypothese für eine nicht rekursive Formel zur Berechnung von a_n auf.

Aufgabe 7: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle konvergente Folgen mit Grenzwerten $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$a_n - b_n \longrightarrow a - b.$$

Aufgabe 8: a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie zwei Definitionen dafür an, dass f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

b) Berechnen Sie direkt unter Verwendung einer der beiden Definitionen (ohne Benutzung von Ableitungsregeln) die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx + b$ für beliebige $m, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie Supremum und Infimum folgender Menge:

$$A = \left\{ x \mid 3 < \frac{1}{x} \leq 7 \right\} .$$

Hat diese Menge ein Maximum bzw. ein Minimum?

Aufgabe 10: Gegeben sind die 3 Funktionen

a) $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$,

b) $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{x^2-3}{(x-1)^2}$,

c) $h : \mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \frac{3x-2}{|3x-2|}$.

Welche Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich? Welche Funktionen lassen sich zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion stetig ergänzen?

Aufgabe 11: Berechnen Sie die ersten Ableitungen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad f(x) = 3x^4 - 4x^2 + x - 6 \,, & \text{b)} \; g(x) = (x^2-3)^7 \,, \\ \text{c)} \quad h(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2-4}}{\sqrt{x^2+100}} \,, & \text{d)} \; i(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n-1}\right)^n . \end{array}$$

Aufgabe 12: Wie muss a gewählt werden, damit gilt:

$$(2+2h)^3 = 8 + ah + o(h) \quad \text{mit} \quad \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0\,?$$

Aufgabe 13: a) Bestimmen Sie die drei lokalen Maxima und die zwei lokalen Minima der Funktion

$$W(x) = (x^2-2)^2$$

auf dem Intervall $[-2, 2]$.

b) Welche lokalen Extrema ergeben sich für die Funktion

$$f(x) = |x^2 - 3x| \,?$$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion!

Tipp: Denken Sie daran, dass lokale Extrema auch am Rand auftreten können.

Aufgabe 14: Die Funktionen f, g, h seien stetig differenzierbar. Zeigen Sie durch Verwendung der Produktregel, dass gilt:

$$(fgh)' \quad = \quad f'gh + fg'h + fgh' \;.$$

Aufgabe 15: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion, d.h. die Funktion f selber ist differenzierbar und ihre erste Ableitung f' stetig. Welche Aussagen sind richtig?

a) Gilt $f'(x) > 0$ für alle x, dann hat f an der Stelle $x = a$ ein Minimum.

b) Ist f streng monoton wachsend, dann gilt für alle x die Ungleichung $f'(x) > 0$.

c) Hat f ein Minimum an der Stelle x_0 mit $a < x_0 < b$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

d) Hat f ein Minimum an der Stelle $x_0 \in [a, b]$, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

e) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

f) Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, so ist f entweder konstant oder es gibt ein $\xi \in (a, b)$, so dass f an der Stelle ξ ein Maximum oder ein Minimum hat.

Aufgabe 16: Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Wenn f differenzierbar ist in x_0, so ist auch $|f|$ differenzierbar in x_0.

ja ☐ nein ☐

b) Wenn f und g stetig in x_0 sind, so sind auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ stetig in x_0.

ja ☐ nein ☐

c) Wenn fg stetig in x_0 ist, so sind auch f und g stetig in x_0.

ja ☐ nein ☐

d) Ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f an dieser Stelle auch stetig.

ja ☐ nein ☐

e) Ist f an der Stelle x_0 stetig, so ist f an dieser Stelle auch differenzierbar.

ja ☐ nein ☐

Aufgabe 17: Berechnen Sie die ersten beiden Näherungen der folgenden Funktionen nach dem Newton-Verfahren

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \,, \quad (n \in \mathbb{N}) \,.$$

a) Für die affin-lineare Funktion $f(x) = 2x - 3$ mit $x_0 = 0$ als Startwert.

b) Für die quadratische Funktion $q(x) = x^2 - 4$ mit $x_0 = -1$ als Startwert.

c) Für die kubische Funktion $k(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ mit $x_0 = 0$ als Startwert.

Aufgabe 18: Zeigen Sie, daß für die Funktionen

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{und} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

gilt:

$$\text{a)} \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \text{b)} \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Aufgabe 19: Sind die folgenden Funktionen stetig auf ihrem Definitionsgebiet?

a) $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(1-x)^2}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

Aufgabe 20: Ist $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) x^2 & \text{, auf } \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases}$ differenzierbar in 0?

Aufgabe 21: Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f(x,y) = (x-y) \cdot (x+y)$$

und die Menge

$$\left\{ (x,y) \;\middle|\; \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} - 1 = 0 \right\}.$$

Aufgabe 22: Die Fläche einer Kugelkappe ist durch die Beziehung

$$A(r,h) = 2\pi r h$$

gegeben. Dabei ist r der Radius der Kugel und h die Höhe der Kugelkappe (d.h. die Kugelkappe beginnt in Höhe $r-h$ und endet in Höhe r).
Um wieviel Prozent ändert sich (bis auf Terme höherer Ordnung) die Fläche A, wenn r und h um je 1% vergrößert werden?

Aufgabe 23:

a) Finden Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$, der senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ steht.

b) Finden Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht.

c) Welches geometrische Objekt bilden die Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ stehen?

d) Welches geometrische Objekt bilden die Vektoren $w \in \mathbb{R}^3$, die senkrecht auf den beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ stehen?

Aufgabe 24: Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der beiden Geraden G_1 und G_2 zeichnerisch durch Anfertigen einer geeigneten Skizze und rechnerisch durch Lösen des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} G_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, 2x - y = 1 \right\} \\ G_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, -x - y = \frac{5}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 25: Bestimmen Sie eine Gerade durch die Punkte

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Koordinatenachsen.

Aufgabe 26: a) Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

i) Zeigen Sie, daß diese vier Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

ii) Welche Dimension hat $\mathrm{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$?

b) Bilden die drei Vektoren

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, so geben Sie bitte einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ an, der sich nicht als Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen läßt.

Tipp: Berücksichtigen Sie die Eigenschaften des Kreuzproduktes $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

c) Sind die drei Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Bilden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 27: Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Wie lauten die Koordinaten des Vektors

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Basis?

Aufgabe 28: Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{(1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

b) $\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

c) $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

d) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\}$ ja ☐ nein ☐

e) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\}$ ja ☐ nein ☐

Aufgabe 29: Zeigen Sie, dass $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ genau dann orthogonal sind, wenn gilt

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 .$$

Interpretieren Sie die Aussage geometrisch.

Aufgabe 30: Welche der folgenden Objekte haben eine Dimension?

a) Ein Vektorraum, ja ☐ nein ☐

b) eine Linearkombination, ja ☐ nein ☐

c) die lineare Hülle (der aufgespannte Raum) einer Menge von Vektoren, ja ☐ nein ☐

d) ein Untervektorraum, ja ☐ nein ☐

e) Welche der folgenden Zahlen kommen als Dimension eines Vektorraumes in Frage:

$$-1, 0, 1, 17.5, 42, 2001, \infty \text{ ?}$$

Aufgabe 31: Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Man kann je zwei Vektoren eines Vektorraumes addieren.
ja ☐ nein ☐

b) Man kann einen Vektor $\mathbf{v}$ durch einen Vektor $\mathbf{w}$ dividieren, falls $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ist.
ja ☐ nein ☐

c) Jeder Vektorraum hat ein eindeutiges Nullelement.
ja ☐ nein ☐

d) Jeder Vektorraum ein eindeutiges Einselement.
ja ☐ nein ☐

e) Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, so ist $\{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in V\} = V$.
ja ☐ nein ☐

f) Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, so ist $\{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in V\} = V \times V$.
ja ☐ nein ☐

g) $\mathbb{R}^n$ besteht aus allen n-Tupeln reeller Zahlen.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 32: Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume, wenn man die Addition und die Multiplikation komponentenweise definiert?

a) Die Menge aller unendlichen reellen Folgen, die nur endlich viele von 0 verschiedene Komponenten haben.
ja ☐ nein ☐

b) Die Menge aller unendlichen reellen Folgen, die unendlich viele von 0 verschiedene Komponenten haben.
ja ☐ nein ☐

c) Die Menge aller unendlichen reellen Folgen, die nur endlich viele von 1 verschiedene Komponenten haben.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 33:

a) Jeder Untervektorraum ist ein affiner Unterraum.
ja ☐ nein ☐

b) Jeder affine Unterraum ist ein Untervektorraum.
ja ☐ nein ☐

c) Manche affinen Unterräume sind Untervektorräume.
ja ☐ nein ☐

d) Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum.
ja ☐ nein ☐

e) Jeder affine Unterraum ist ein Vektorraum.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 34: Welche der folgenden Teilmengen U von $\mathbb{R}^n$ ist ein Untervektorraum?

a) $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$, ja ☐ nein ☐

b) $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 1\}$, ja ☐ nein ☐

c) $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$, ja ☐ nein ☐

d) $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = 0\}$, ja ☐ nein ☐

e) $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 - x_2^2 = 0\}$. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 35:

a) Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sind linear unabhängig, wenn eine Linearkombination von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ den Nullvektor ergibt. ja ☐ nein ☐

b) Die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sind linear unabhängig, wenn ihre Summe $\mathbf{0}$ ist. ja ☐ nein ☐

c) Der Nullvektor ist nur durch die triviale Linearkombination darstellbar. ja ☐ nein ☐

d) Der Nullvektor ist stets durch die triviale Linearkombination darstellbar. ja ☐ nein ☐

e) Der Vektor $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, wenn $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ja ☐ nein ☐

f) Der Vektor $(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, wenn $x_1 = x_2 = x_3$. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 36: Sei V ein Vektorraum.

a) Jede Teilmenge einer Menge linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig.

ja ☐ nein ☐

b) Jede Teilmenge einer Menge linear abhängiger Vektoren ist linear abhängig.

ja ☐ nein ☐

c) Wenn eine Basis von V endlich ist, sind alle Basen von V endlich.

ja ☐ nein ☐

d) Es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Vektoren der Form (α, α, α).

ja ☐ nein ☐

e) Jede Basis des $\mathbb{R}^3$ besteht aus Vektoren der Form (x, x, x).

ja ☐ nein ☐

f) Jeder Vektor der Form (α, α, α) kann zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden.

ja ☐ nein ☐

g) Jeder Vektor der Form (α, α, α) mit $\alpha \neq 0$ kann zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden.

ja ☐ nein ☐

Aufgabe 37: Bestimmen Sie eine 3×3 Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\operatorname{Ker}(\mathbf{P})$ die Ebene

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \qquad \text{ist.}$$

Aufgabe 38: Sind die folgenden Polynome linear abhängig?

$$\begin{aligned} t &\mapsto 1 - t \\ t &\mapsto 3 - 7t \\ t &\mapsto 4t \end{aligned}$$

Aufgabe 39: Sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 40: Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$ kann man addieren und multiplizieren. Nennen Sie zwei Gründe dafür, dass die 2×2-Matrizen trotzdem keinen Körper bilden.

Aufgabe 41: Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 4x + 3y + z &= 9 \\ 2y - z &= 0 \\ 3z &= 6\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 42: Ein Parallelogramm werde durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und ein Parallelepiped durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms und das Volumen des Parallelepipeds.

Aufgabe 43: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, sowie der Vektor $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mittels Gauß-Elimination.

b) In der LR-Zerlegung treten Matrizen $L^{(1)}, L^{(2)}, (L^{(1)})^{-1}, (L^{(2)})^{-1}$ auf. Geben Sie diese an, und berechnen Sie $L = (L^{(2)})^{-1}(L^{(1)})^{-1}$.

c) Geben Sie weiterhin die Matrix R der LR-Zerlegung an.

d) Lösen Sie schließlich das Gleichungssystem $Ax = b$ noch einmal, diesmal durch Vorwärtseinsetzen ($Ly = b$) und anschließendes Rückwärtseinsetzen ($Rx = y$).

Aufgabe 44: Berechnen Sie das Matrix-Produkt

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 45: Alle in dieser Aufgabe auftretenden Matrizen seien über dem Körper $\mathbb{R}$ definiert; A und B seien zwei solche Matrizen.

a) Man kann zwei beliebige Matrizen miteinander multiplizieren.
ja ☐ nein ☐

b) Man kann jede Matrix mit sich selbst multiplizieren.
ja ☐ nein ☐

Man kann das Produkt AB von A und B bilden, wenn die folgenden Zahlen gleich sind:

c) Die Anzahl der Zeilen von A und die Anzahl der Spalten von B.
ja ☐ nein ☐

d) Die Anzahl der Spalten von A und die Anzahl der Zeilen von B.
ja ☐ nein ☐

e) Die Anzahl der Spalten von A und die Anzahl der Spalten von B.
ja ☐ nein ☐

f) Die Anzahl der Zeilen von A sowie die Anzahl der Zeilen und Spalten von B.
ja ☐ nein ☐

g) Wenn AB definiert ist, so ist auch BA definiert.
ja ☐ nein ☐

h) Wenn AB und BA definiert ist, dann ist $AB = BA$.
ja ☐ nein ☐

i) Wenn AB und BA definiert ist, dann ist $AB \neq BA$.
ja ☐ nein ☐

j) Wenn A und B verschieden von der Nullmatrix sind, dann ist auch AB verschieden von der Nullmatrix.
ja ☐ nein ☐

k) Wenn A verschieden von der Nullmatrix ist, dann ist auch AA verschieden von der Nullmatrix.
ja ☐ nein ☐

Aufgabe 46: Sei f eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

a) $m \leq n$, ja ☐ nein ☐

b) $n \leq m$, ja ☐ nein ☐

c) $m = n$. ja ☐ nein ☐

d) Nur der Nullvektor wird auf den Nullvektor abgebildet. ja ☐ nein ☐

e) Es gibt genau drei lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$. ja ☐ nein ☐

f) Falls $m, n \geq 1$ gibt es unendlich viele lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$. ja ☐ nein ☐

g) Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 47: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung eines Vektorraumes V in einen Vektorraum W. Dann gilt:

a) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. ja ☐ nein ☐

b) $f(1) = 1$. ja ☐ nein ☐

c) $f(-\mathbf{v}) = -f(\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v} \in V$. ja ☐ nein ☐

d) $f(k\mathbf{v}) = f(k) + f(\mathbf{v})$ für alle $k \in K$ und alle $\mathbf{v} \in V$. ja ☐ nein ☐

e) $f(k\mathbf{v}) = f(k) \cdot f(\mathbf{v})$ für alle $k \in K$ und alle $\mathbf{v} \in V$. ja ☐ nein ☐

f) $f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v})$ für alle $k \in K$ und alle $\mathbf{v} \in V$. ja ☐ nein ☐

g) $\mathrm{Bild}(f) = W$. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 48: Sei $U = \mathrm{Ker}(f)$ der Kern einer linearen Abbildung $f : V \to W$. Dann gilt:

a) $U = \{\mathbf{w} \in W \mid f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}\}$. ja ☐ nein ☐

b) $U = \{\mathbf{w} \in V \mid f(\mathbf{w}) = \mathbf{0}\}$. ja ☐ nein ☐

c) $U = \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. ja ☐ nein ☐

d) $U = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$. ja ☐ nein ☐

e) $U = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = 1\}$. ja ☐ nein ☐

Aufgabe 49: Geben Sie die Matrixdarstellungen folgender linearer Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ in der Standardbasis an:

a) Drehung um $\frac{\pi}{4}$,

b) Spiegelung an der Geraden $g = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 0\}$,

c) erst Drehung um $\frac{\pi}{4}$, dann Spiegelung an der Geraden $g = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 0\}$.

Aufgabe 50: a) Wie lautet die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_2 + x_1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardbasis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$?

b) Zeigen Sie, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet und bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung aus a) bezüglich dieser Basis (als Basis von Urbild- und Bildraum).

Aufgabe 51: Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4323 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 52: a) Gegeben sei eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung.
Geben Sie die Dimension von Kern und Bild an.
Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig?

b) Betrachten Sie nun die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie wieder Kern und Bild dieser Abbildung.

Aufgabe 53: a) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ein $c \in \mathbb{R}$ an, so dass die Niveaulinie $\{x \mid f(x) = c\}$ der Einheitskreis (der Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt) ist.

b) Geben Sie ein Intervall $[a, b) \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^2$ an, die den Einheitskreis (den Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt) durchläuft.

Aufgabe 54: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &:= \max(|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|) = |x_1| + |x_2| \\ g(x_1, x_2) &:= |x_1| - |x_2| \,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen und beschreiben Sie die Niveaumengen

$$\begin{aligned} N_r(f) &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = r\} \quad \text{und} \\ N_r(g) &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x_1, x_2) = r\} \,. \end{aligned}$$

Fertigen Sie auch eine Skizze einiger Niveaumengen an.

b) Bestimmen und beschreiben Sie den Graphen der Funktionen f und g. Skizzieren Sie die Graphen ebenfalls.

c) In welchen Punkten sind die Funktionen f, g differenzierbar bzw. in welchen Punkten sind sie nicht differenzierbar?

Tipp: Man kann dies anhand des jeweiligen Graphen erkennen!

Aufgabe 55: Bestimmen Sie die Gleichung des Tangentialraumes an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x, y) = 2x + 5y^2x$ im Punkte $(2, 1, f(2, 1))$.

Aufgabe 56: Betrachten Sie die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} \gamma(t) &:= \begin{pmatrix} 2r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ d(x_1, x_2, x_3) &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \,, \end{aligned}$$

wobei h, r positiv seien und $0 \leq t \leq 6\pi$ gelte. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(t) := d(\gamma(t))$$

a) direkt, d. h. indem Sie zuerst $f(t)$ berechnen und danach $f'(t)$.

b) mit Hilfe der Kettenregel.

c) Beschreiben Sie die durch $\gamma(t)$ gegebene Kurve im $\mathbb{R}^3$ und skizzieren Sie diese Kurve.

Aufgabe 57: Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y + 2x \\ x^3 - 2y^2x \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\ln(1+y^2) + z \\ \cos(zx) + y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls existent die Jacobimatrix $D(f \circ g)(2,0,0)$.

Aufgabe 58: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen der Funktion

$$g(x,y) = f((x+y)^2)\ .$$