

Aufgabe 21: a) Bestimmen Sie die drei lokalen Maxima und die zwei lokalen Minima der Funktion

$$W(x) = (x^2 - 1)^2$$

auf dem Intervall $[-2, 2]$.

b) Welche lokalen Extrema ergeben sich für die Funktion

$$f(x) = |x^2 - 2x| ?$$

Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion!

Aufgabe 22: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ und $f'(a) = -1$. Zeichnen Sie eine Skizze und zeigen Sie folgendes:

a) Es existiert ein $h > 0$ so dass $f(a + h) < 0$.

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Rolle aus der Vorlesung.

b) Es existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

c) Es existiert ein $x_1 \in (a, x_0)$ mit $f'(x_1) = 0$.

Aufgabe 23: a) Man zeige mittels Zwischenwertsatz, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto f(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 4$ drei Nullstellen besitzt. Man gebe jeweils Intervalle der Länge 1 an, in denen sich die Nullstellen befinden.

Des Weiteren berechnen Sie für das Intervall $I = [1, 2]$ 7 Schritte des Bisektionsverfahren zur Näherungsbestimmung einer Nullstelle von f .

b) Man zeige ohne Verwendung eines Taschenrechners, dass die Funktion $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto g(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 4 + \frac{1}{2} \cos(x)$ mindestens drei Nullstellen besitzt. Man gebe jeweils Intervalle der Länge 1 an, in denen sich die Nullstellen befinden.

Hinweis: Man schätze $\cos(x)$ durch $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ ab.

Aufgabe 24: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und ihre Ableitung f' sei stetig. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

Tipp: Benutzen Sie den Mittelwertsatz! **Bemerkung:** Man nennt $(\Delta_{2h}f)(x) := \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ den zentralen oder symmetrischen Differenzenquotienten von f . Für stetig differenzierbare Funktionen gilt also, dass die Ableitung auch durch den zentralen Differenzenquotienten approximiert wird.

Zusatzfrage: Gilt auch $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'(x)$?

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

<http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/>