Übungen zur Ingenieur-Mathematik I **WS 2012/13**
Blatt 8 **04./06.12.2012**

Aufgabe 29: Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume?

a) $\{(1, x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

b) $\{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

c) $\{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ja ☐ nein ☐

d) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 = 5x_3\}$ ja ☐ nein ☐

e) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 = 7\}$ ja ☐ nein ☐

Aufgabe 30: Seien V und W $\mathbb{R}-$Vektorräume.
Das Kartesische Produkt $V \times W$ ist definiert als die Menge aller geordneten Paare

$$V \times W = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}.$$

Zeigen Sie, dass $V \times W$ mit der Addition

$$(v, w) + (\tilde{v}, \tilde{w}) = (v + \tilde{v}, w + \tilde{w})$$

und der Skalarmultiplikation

$$\alpha(v, w) = (\alpha v, \alpha w)$$

ebenfalls ein $\mathbb{R}-$Vektorraum ist.

Aufgabe 31: Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Skalarprodukte sind.

a) $j(x, y) := x_1y_1 - x_2y_2$

b) $k(x, y) := 2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$

Aufgabe 32:

a) Sei $g(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V und $\|\cdot\|_g$ die davon induzierte Norm. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt:

$$\|x - y\|_g^2 = \|x\|_g^2 + \|y\|_g^2 - 2g(x, y).$$

b) Was bedeutet dies geometrisch, wenn man für $g(\cdot, \cdot)$ das euklidische Skalarprodukt wählt?
Tipp: Erinnern Sie sich an die geometrische Deutung des euklidischen Skalarproduktes.

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

`http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/`