

Aufgabe 41: Gegeben sei eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit

$$f(x) = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung. Sind die Spalten-/Zeilenvektoren linear abhängig?

Aufgabe 42: a) Bestimmen Sie eine 3×3 Matrix A so, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x) = Ax$$

als Kern die Ebene

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$$

hat.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $\text{Ker}(f)$ und $\text{Bild}(f)$.

c) Kann man A so wählen, dass

$$\text{Ker}(f) = H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 1\}?$$

Aufgabe 43: Lösen Sie das folgende Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 8 & 14 & 20 & 26 \\ 4 & 11 & 20 & 30 & 40 \\ 5 & 14 & 26 & 40 & 55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 48 \\ 85 \\ 125 \\ 166 \end{pmatrix}$$

mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

Aufgabe 44: Seien h_1, h_2, h_3 die unbekanntes Höhen dreier Messpunkte über Normalhöhennull.

a) Durch Messungen haben Sie bestimmt:

$$h_1 - h_2 = 45 \text{ m}$$

$$h_2 - h_3 = -33 \text{ m}$$

$$h_3 - h_1 = -12 \text{ m}$$

Zeigen Sie, dass Sie nur anhand dieser drei Messungen die drei Höhen h_1, h_2, h_3 *nicht* berechnen können.

b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall, die drei Messungen seien:

$$h_1 - h_2 = d_{12}$$

$$h_2 - h_3 = d_{23}$$

$$h_3 - h_1 = d_{31}$$

Welche Bedingung müssen d_{12}, d_{23}, d_{31} erfüllen, damit mindestens eine Lösung h_1, h_2, h_3 existiert, die alle drei Gleichungen erfüllt?

Die Übungsblätter, Musterlösungen und das Skript in der jeweils aktuellen Fassung finden Sie auch auf der Webseite zur Vorlesung:

<http://numod.ins.uni-bonn.de/teaching/ws12/ingmath1/>