Musterlösung

1) a) $\int_1^3 \ln(3x-2)\,dx$

$\left\{ 3x-2=t \Rightarrow x = \frac{t+2}{3} \Rightarrow dx = \frac{1}{3}\,dt \right.$

$$= \int_1^7 1\cdot\ln(t)\,\tfrac{1}{3}\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} \left[\tfrac{1}{3}\, t \ln(t)\right]_1^7 - \int_1^7 \tfrac{1}{3}\, t\cdot\tfrac{1}{t}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{3}\, 7\ln(7) - \tfrac{1}{3}\, 1\ln(1) - 2 = \tfrac{1}{3}\, 7\ln(7) - 2\,.$$

b) $\sqrt{4-x^2} \overset{!}{=} 1 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow a = -\sqrt{3}\,,\ b = +\sqrt{3}$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

$\left\{ x = 2\sin(t) \Rightarrow dx = 2\cos(t)\,dt \right.$ (Substitution)

$$= \int_{\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}^{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} 2\sqrt{1-\sin(t)^2}\; 2\cos(t)\,dt$$

$$= 4\int_{\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}^{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \cos^2(t)\,dt \qquad \left|\; \begin{aligned} \sin^{-1}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \tfrac{\pi}{3} \\ \sin^{-1}\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) &= -\tfrac{\pi}{3} \end{aligned}\right.$$

$$\underset{\text{Tipp}}{=} 4\left[\tfrac{1}{2}\left(t + \sin(t)\cos(t)\right)\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \underbrace{\tfrac{4}{3}\pi + \sqrt{3}}_{\text{nicht mehr gefragt}}$$

<u>Flächeninhalt</u>: $A = \frac{4}{3}\pi + \sqrt{3} - 2\sqrt{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

c) Satz 11.63 im Skript: Ω beschränktes, glatt berandetes Gebiet, $f, g\ \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, dann gilt:

$\int_\Omega \partial_i f(x) g(x)\,dx = -\int_\Omega f(x)\,\partial_i g(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) N_i(x)\,d\sigma$, $N_i(x)$ ist i. Kompon. der äußeren Normalen auf $\partial\Omega$

2) a) Es ist $f'(x) = -2(-\sin(\pi x)\pi) = 2\pi \sin(\pi x)$.

$f(0) = -2 \qquad f(1) = 2$

$f'(0) = 0 \qquad f'(1) = 0$

$\Rightarrow$ Hermite-Interpolation

$p(x) = -2h_4(x) + 2h_2(x)$

b) Forderung: Definition 7.11
Darstellung: Lemma 7.13

Forderung: $L_i \in \mathcal{P}_n$ und $L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

Darstellung: $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$

3a) Satz 11.30: Ω stückweise glatt berandetes Gebiet, $g: \Omega \to \mathbb{R}^n$ invertierbar und stetig differenzierbar, $Dg(\cdot)$ glm. stetig auf Ω, $f: g(\Omega) \to \mathbb{R}$ glm. stetig. Dann gilt

$$\int_{g(\Omega)} f(y)\,dy = \int_\Omega f\circ g(x)\,|\det Dg(x)|\,dx$$

b) Setze $g(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} z \\ r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix}$, $\vec{x} = (r,\phi,z)$

Sei $\Omega = \{(r,\phi,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le r \le 3,\ 0 \le \phi < 2\pi,\ -4 \le z \le 4\}$ und K die Menge aus der Aufgabe. Dann bildet g die Menge Ω auf K (bijektiv) ab, g ist stetig differenzierbar, genau wie g^{-1}! Weiterhin ist $Dg(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos(\phi) & -r\cos(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}$

Aus dem Transformationssatz mit $f \equiv 1$ folgt

$$V = \int_{g(\Omega)} 1\,dy = \int_{g(\Omega)} f(y)\,dy = \int_\Omega f(g(\vec{x}))\,\underbrace{|\det Dg(\vec{x})|}_{=r}\,d\vec{x}$$

$$= \int_{-4}^{4}\int_0^{2\pi}\int_1^3 r\,dr\,d\phi\,dz = 8\cdot 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_1^3 = \underline{\underline{64\pi}}$$

c) Es folgt nach einer Parametrisierung

$$A = \int_{-\frac{1}{\sqrt{c}}}^{+\frac{1}{\sqrt{c}}}\int_{-\sqrt{\frac{1-cx^2}{d}}}^{+\sqrt{\frac{1-cx^2}{d}}} dy\,dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{c}}}^{+\frac{1}{\sqrt{c}}} 2\sqrt{\frac{1-cx^2}{d}}\,dx$$

$\{$ Substitution $x \longmapsto \frac{\sin\theta}{\sqrt{c}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{d}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\frac{\cos\theta}{\sqrt{c}}\,d\theta = \frac{2}{\sqrt{cd}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$\{$ Stammfunktion von $\cos^2\theta$ ist $\frac{1}{2}(\theta + \sin(\theta)\cos(\theta))$
$\to$ siehe 1)

$$\Rightarrow A = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sqrt{cd}}}}$$

1a) Normalengleichung: $A^t A z = A^t b$

Satz 12.18: $\nabla \|Az-b\|^2=0 \Leftrightarrow A^t A z - A^t b = 0$

wegen $\partial_i \sum_{j,k} (A_{jk}x_k - b_j)^2 = 2\sum_{j,k}(A_{jk}x_k - b_j)A_{ji} = 2\sum_{j,k} A^t_{ij}(A_{jk}x_k - b_j) = 0$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 1 & -3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

Die Normalengleichung für das Problem $\sum_{i=1}^{4} [(\alpha+\beta x_i)-y_i]^2 \to \min$

lautet $A^t A z = A^t b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 226 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 4 \\ 137 \end{bmatrix} \Rightarrow z = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$

c) Mit der üblichen Notation für die QR-Zerlegung (S. 403 ff. Skript) ergibt sich:

$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ 1 & -3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad \alpha_1 = -\operatorname{sgn}(1) \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = -2$

$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha_1 e_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Q^{(1)} = \mathbb{1} - \frac{1}{6} v_1 v_1^t$

$\Rightarrow Q^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Q^{(1)} \begin{bmatrix} -10 \\ -3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad Q^{(1)} b = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = b^{(2)}$

$\Rightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \alpha_2 = -15 \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Q^{(2)} = \mathbb{1} - \frac{1}{225} v_2 v_2^t$

$Q^{(2)} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Q^{(2)} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Q^{(2)} b^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ -2{,}4 \\ 1{,}8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -15 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ -2{,}4 \\ 1{,}8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0{,}7 \\ \beta = 0{,}6 \end{matrix}$ wie oben

5) a) Definition 9.1: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert zu $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, wenn es einen Vektor $x \neq 0$ mit $Ax = \lambda x$ gibt. x heißt hierbei Eigenvektor.

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, falls eine nichtsinguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, so dass $D = B^{-1} A B$ eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonaleinträge von D entsprechen hierbei den Eigenwerten von A und die Spalten von B sind die zugehörigen Eigenvektoren.

c) charakteristisches Polynom von A: $(x-3)(x-2)(x-1)=0$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von A sind 1, 2 und 3

Eigenvektor zu 1: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

zu 2: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

zu 3: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B^{-1} A B$$

d) aus c) folgt: $B D B^{-1} = A \Rightarrow A^5 = B D^5 B^{-1}$

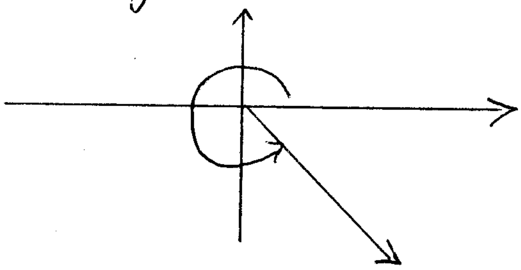
$$D^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 243 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 242 & 0 \\ 0 & 243 & 0 \\ 62 & -484 & 32 \end{pmatrix}$$

6) a) $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

b) $re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$

c) Es gilt $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2e^{\frac{7}{4}\pi i} = 2e^{-\frac{1}{4}\pi i}$, denn



$1-i$ hat die nebenstehende geometrische Form

$$\Rightarrow z^7 = 2^7 \cdot \left(e^{-\frac{1}{4}\pi i}\right)^7 = 2^7 e^{-\frac{7}{4}\pi i} = 128\, e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$= 64\sqrt{2} + 64\sqrt{2} \cdot i$$

d) Die Lösungen sind $(1+i)$ und $(4-2i)$.

$$z_{1,2} = -\frac{i-5}{2} \pm \sqrt{\frac{(i-5)^2}{4} - 6 - 2i}$$

$$= \frac{5-i}{2} \pm \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i\right) \Rightarrow z_1 = 4 - 2i$$

$$z_2 = 1 + i$$

Dabei ist $\sqrt{\frac{(i-5)^2}{4} - 6 - 2i} = \sqrt{-\frac{9}{2}i}$

e) $$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} \pm \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

f) Wende e) mit $\theta = 2\alpha$ an

$$\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = e^{2i\alpha} = (e^{i\alpha})^2 = (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)) + i(2\cos(\alpha)\sin(\alpha))$$

Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$ $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$$= 2\cos^2(\alpha) - 1$$

7) a) $f(x) = \sin(x)^2$

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$f''(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$$

Taylor: $f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \mathcal{O}(|x-x_0|^3)$

$$= f(x_0) + 2\sin(x_0)\cos(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(2\cos^2(x_0) - 2\sin^2(x_0)\right) \cdot (x-x_0)^2 + \mathcal{O}(|x-x_0|^3)$$

b) Es gilt $f(x,y) = f(0,0) + Df(0,0)^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x \;\; y)\, D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^3\right)$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x)\cos(x)\cos(y^2) \\ -\sin(x)^2 \sin(y^2)\, 2y \end{pmatrix}$$

$\underline{Df(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Entwicklung um $x_0 \in \mathbb{R}^2$

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos^2(x)\cos(y^2) - 2\sin^2(x)\cos(y^2) & -4y\sin(x)\cos(x)\sin(y^2) \\ -4y\cos(x)\sin(x)\sin(y^2) & -4y^2\sin(x)^2\cos(y^2) - 2\sin(x)^2\sin(y^2) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{0} + \underbrace{Df(0,0)^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{0} + \frac{1}{2}(x \;\; y)\, D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^3\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x \;\; y)\begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^3\right) = x^2 + \mathcal{O}\left(\left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|^3\right)$$

8) a) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos^3(t) \\ a\sin^3(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -3a\cos^2(t)\sin(t) \\ 3a\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow |\dot{\gamma}(t)| = 3a\sin(t)\cos(t)$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$L(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin(t)\cos(t)\,dt$

$\{ (\sin^2(t))' = 2\sin(t)\cos(t)$

$= \frac{3}{2} a \left[\sin^2(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} a$

b) Sei $a = 1$ und $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lim_{t \searrow 0} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lim_{t \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Skizze auf anderem Blatt!

c) Sei $a = 1$. Wir zeigen $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$ und $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, woraus die Symmetrie aus der Gleichung folgt. Es ist

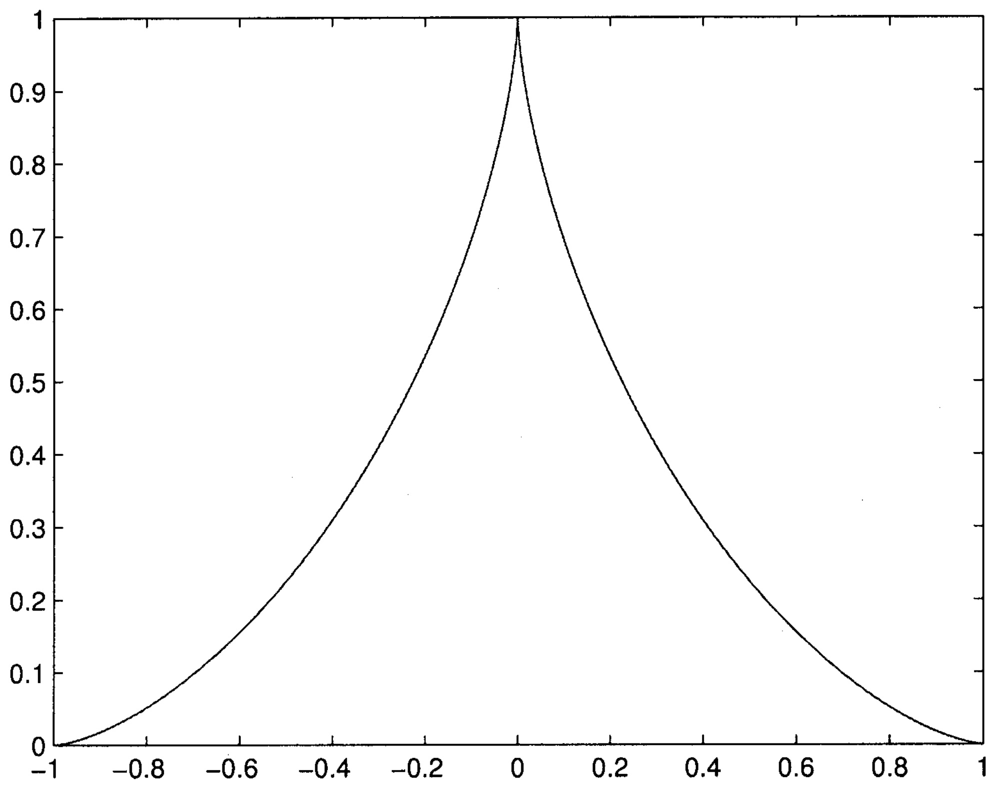
$\cos(\pi - t) + i\sin(\pi - t) = e^{i(\pi - t)} = \underbrace{e^{i\pi}}_{=(-1)} \cdot e^{-it} = -e^{-it}$

$-\cos(t) = \mathrm{Re}(-e^{it}) = \mathrm{Re}(-e^{-it}) = \cos(\pi - t)$

$\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it}) = \mathrm{Im}(-e^{-it}) = \sin(\pi - t)$

Hieraus folgt Achsensymmetrie bzgl. y-Achse.

Skizze auf anderem Blatt!


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

9) a) $\dot{r}(t) = \frac{1}{5} t r(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} = \frac{1}{5} t$$

Integration bzgl. t liefert die allgemeine Lösung $\tilde{r}$

$$\ln(\tilde{r}(t)) = \frac{1}{10} t^2 + C \Rightarrow \tilde{r}(t) = \exp\left(\frac{1}{10} t^2 + C\right)$$

Um die spezielle Lösung r zu bestimmen, muss die Anfangsbedingung erfüllt sein:

$$r_0 = r(0) = \exp(C) \Rightarrow C = \ln(r_0)$$

$$\Longrightarrow r(t) = \exp\left(\frac{1}{10} t^2 + \ln(r_0)\right)$$

b) Anfangswert sei y_0, τ sei ein fester Zeitschritt
Dann ist die Iterationsvorschrift

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{\tau}{2} f(t_i, y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + \tau f\left(t_i + \frac{\tau}{2}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

Es ist $f(t, r(t)) = \frac{1}{5} t \cdot r(t)$, also ergibt sich

$$r_0 = r(0)$$
$$r_{i+\frac{1}{2}} = r_i + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{1}{5} t_i r_i$$

$$r_{i+1} = r_i + \tau \frac{1}{5}\left(t_i + \frac{\tau}{2}\right) r_{i+\frac{1}{2}}$$

c) Das Cauchy-Euler Verfahren ist von zweiter Ordnung konvergent, falls f stetig differenzierbar ist, also

$$\| y(t_i) - y_i \| = O(\tau^2)$$

(Lemma 10.26)

10) a)

$\nabla f(x,y) = 0 \iff (x,y)$ kritischer Punkt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y^2 - 2y - 5 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

$$\iff \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ 3y^2 - 2y - 5 = 0 \end{matrix} \right\} \iff \left\{ \begin{matrix} (x,y) = (0,-1) \\ (x,y) = (0,\frac{5}{3}) \end{matrix} \right\}$$ Dies sind die einzigen kritischen Punkte!

b) $$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y-2 \end{pmatrix}$$

$$D^2 f(0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

+2 und −8 sind Eigenwerte
$\Rightarrow$ Matrix indefinit
$\Rightarrow$ (0, −1) ist Sattelpunkt

$$D^2 f(0,\tfrac{5}{3}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ +2 und +8 sind Eigenwerte
$\Rightarrow$ Matrix ist positiv definit
$\Rightarrow$ lokales Minimum

11) a) γ sei der Bogenlänge nach parametrisiert.
Dann heißt $\|\ddot{\gamma}(t)\|$ die Absolutkrümmung von γ im Punkt $\gamma(t)$.

b) Der Kreis mit Radius $r = \frac{1}{2}$ hat die konstante Krümmung 2.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\frac{1}{r}t) \\ r\sin(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{r}t) \\ \cos(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ (bogenlängenparametrisiert)

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}(t) = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\cos(\frac{1}{r}t) \\ -\sin(\frac{1}{r}t) \end{pmatrix} \Rightarrow \|\ddot{\gamma}(t)\| = \frac{1}{r} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$