

Aufgabe 22: Entwicklen Sie die Funktion

$$f(x, y, z) = -\sqrt{1 - x^2 + y^2 + z^2}$$

nach Taylor an der Stelle $(0, 0, 0)$ bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

- $f(0, 0, 0) = -1$
- $\text{grad } f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{grad } f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $D^2 f(x, y, z) = \frac{1}{(1-x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1+y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2-1-z^2 & yz \\ -xz & yz & x^2-y^2-1 \end{pmatrix}$
$$\Rightarrow D^2 f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
- $f(\xi, \eta, \zeta) = -1 + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2) + O((\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2})$

Aufgabe 23: Entwicklen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto e^{-\|x-x_0\|^2}$$

nach Taylor an der Stelle $x = x_0$ bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

- $f(x_0) = 1$
- $\text{grad } f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2}(x - x_0) \Rightarrow \text{grad } f(x_0) = \mathbb{K}$
- $D^2 f(x) = -2e^{-\|x-x_0\|^2} \mathbb{K} + 4e^{-\|x-x_0\|^2}(x - x_0)(x - x_0)^T$
$$\Rightarrow D^2 f(x_0) = -2\mathbb{K}$$
- $f(x_0 + \xi) = 1 - \|\xi\|^2 + O(\|\xi\|^3)$