

Aufgabe 6: Berechnen Sie das Volumen des Torus, der durch Rotation des Dreiecks

$$\Delta = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2 \leq x \leq 3, y = 0, 2 - x \leq z \leq x - 2 \}$$

um die z -Achse entsteht,

- indem Sie die Formel zur Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers (aus der Vorlesung) benutzen.
- indem Sie die Schnittflächen berechnen, die sich durch Schneiden des Torus mit Ebenen (im $\mathbb{R}^3$) ergeben, die senkrecht zur z -Achse sind, und über diese Schnittflächen (auf-) integrieren.

LÖSUNG:

- a) Das Dreieck Δ liegt in der x, z -Ebene. Der hier betrachtete Torus ergibt sich durch Rotation dieses Dreiecks um die z -Achse.

Die Formel zur Berechnung des Volumens V eines Rotationskörpers, der um die z -Achse rotiert, lautet

$$V = \pi \int_{z_0}^{z_1} f^2(z) dz,$$

wobei $f(z)$ der Radius der Kreisscheibe ist, der durch die Rotation um die z -Achse entsteht.

Hier ist: $z_0 = -1, z_1 = 1$ Dies erkennt man sehr leicht an Hand einer Skizze oder man überprüft dies auf Grund der Definition von Δ .

Sowie: $f_a(z) = 3$ für $-1 \leq z \leq 0$ für den Rotationskörper, der durch Rotation der äußeren Kante des Dreiecks entsteht und

$f_i(z) = \begin{cases} 2 - z & \text{für } -1 \leq z \leq 0, \\ 2 + z & \text{für } 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$ für den Rotationskörper, der durch Rotation der inneren Kanten des Dreiecks entsteht.

$$\begin{aligned} \Rightarrow V &= \pi \int_{-1}^1 f_a^2(z) dz - \pi \int_{-1}^1 f_i^2(z) dz \\ &= \pi \int_{-1}^1 3^2 dz - \pi \int_{-1}^0 (2 - z)^2 dz - \pi \int_0^1 (2 + z)^2 dz \\ &= 18\pi - \pi \int_{-1}^0 (4 - 4z + z^2) dz - \pi \int_0^1 (4 + 4z + z^2) dz \\ &= 18\pi - \pi \cdot \left\{ \left(4z - 2z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(4z + 2z^2 + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^1 \right\} \\ &= 18\pi - \pi \cdot \left\{ - \left(-4 - 2 - \frac{1}{3} \right) + \left(4 + \frac{7}{3} \right) \right\} \\ &= 18\pi - \frac{38}{3} \cdot \pi \\ &= \frac{16}{3} \pi. \end{aligned}$$

- b) Die Schnittfläche des „Dreiecks“-Torus mit Ebenen senkrecht zur z-Achse liefert für $z = -1$ und $z = 1$ jeweils einen Kreis von Radius 3 und für $-1 < z < 1$ ergeben sich Kreistrichter von unterschiedlicher Dicke. Die Schnittflächen $F(z)$ sind also gegeben durch

$$F(z) = \pi r_a^2(z) - \pi r_i^2(z),$$

wobei $r_a(z)$ den Radius des äußeren Kreises und $r_i(z)$ den Radius des inneren Kreises bezeichnet.

Integriert man diese Schnittflächen für $-1 \leq z \leq 1$ auf, so erhält man die in Aufgabenteil a) verwendete Formel.

Aufgabe 7: Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie $\mathbf{B} = e^{t\mathbf{A}}$.
- Bestimmen Sie $\mathbf{B}^{-1}$. Welche Matrix erhalten Sie?
- Zeigen Sie $\mathbf{B}^{-1} = e^{t\mathbf{A}^T} = (e^{t\mathbf{A}})^T$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}, \\ A^3 &= AA^2 = A \cdot (-\mathbf{1}) = -A, \\ A^4 &= AA^3 = A \cdot (-A) = -A^2 = \mathbf{1}, \\ A^5 &= AA^4 = A \cdot \mathbf{1} = A. \end{aligned}$$

Ab hier wiederholt sich alles!

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^k &= \begin{cases} A & \text{für } k = 4l + 1, l = 0, 1, 2, \dots \\ -\mathbf{1} & \text{für } k = 4l + 2, l = 0, 1, 2, \dots \\ -A & \text{für } k = 4l + 3, l = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{1} & \text{für } k = 4l + 4, l = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \\ \Rightarrow B &= e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l}}{(2l)!} \right) \mathbf{1} + \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{2l+1}}{(2l+1)!} \right) A \\ &= \cos t \cdot \mathbf{1} + \sin t \cdot A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sind $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$. Die zugehörigen Eigenvektoren sind $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Demnach lässt

sich die Matrix A schreiben als

$$\begin{aligned} A &= B \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow e^{At} &= B \begin{pmatrix} e^{-it} & 0 \\ 0 & e^{it} \end{pmatrix} B^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Man rechnet leicht nach, dass

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = B^T.$$

c) Es gilt $B^{-1} = B^T$, also ist B orthogonal.

$$\begin{aligned} \Rightarrow B^{-1} = B^T &= (e^{tA})^T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \right)^T = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (A^T)^k}{k!} = e^{tA^T} = e^{-tA} = (e^{tA})^{-1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Gegeben seien zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

- Sind beide Matrizen A und B orthogonal, so ist auch die Matrix AB orthogonal.
- Ist die Matrix A orthogonal, dann gilt $|\det A| = 1$.

LÖSUNG:

- Wir wollen zeigen, dass die Matrix AB orthogonal ist, d.h. $(AB)^T = (AB)^{-1}$.

$$\begin{aligned} (AB)^T AB &= B^T A^T AB \\ &\stackrel{A \text{ orthogonal}}{=} B^T \mathbb{1} B \\ &= B^T B \\ &\stackrel{B \text{ orthogonal}}{=} \mathbb{1} \\ \Rightarrow (AB)^T &= (AB)^{-1} \end{aligned}$$

- Da die Matrix A orthogonal ist folgt, dass sie auch diagonalisierbar ist.

$$\Rightarrow A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q$$

Die Determinante von A lässt sich also schreiben als

$$\begin{aligned}\det A &= \det Q^{-1} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \det Q \\ &= (\det Q)^{-1} \lambda_1 \cdots \lambda_n \det Q \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_n\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass für die Eigenwerte λ_i einer orthogonalen Matrix gilt $|\lambda_i| = 1$.

$$\Rightarrow |\det A| = 1$$

Aufgabe 9: a) Gegeben seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ und die beiden

Vektoren $x = (1, 0, 1)^T$, $y = (0, 1, 1)^T$.

Zeigen Sie, dass der Winkel $\phi := \angle(x, y)$ zwischen x und y , definiert durch $\cos \phi := \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$, gleich dem Winkel $\psi := \angle(Ax, Ay)$ zwischen Ax und Ay ist.

b) Eine 3×3 Matrix A heißt winkeltreu, falls A invertierbar ist und

$$\angle(Ax, Ay) = \angle(x, y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Matrix A der Form $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ winkeltreu ist.

c) Die Matrix A aus Aufgabenteil a) kann in der Form $A = \lambda Q$ geschrieben werden, wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $Q \in O(3)$. Berechnen Sie diese λ und Q .

Tipp: Berechnen Sie $|\det A|$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass sich die Matrix A schreiben lässt als $A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$.

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{2} = \|y\|, \\ \cos \phi &= \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}. \\ Ax &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \|Ax\| = 2, \\ Ay &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \|Ay\| = 2, \\ \cos \psi &= \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} = \cos \phi. \quad \checkmark\end{aligned}$$

b)

$$\angle(Ax, Ay) = \angle(x, y) \Leftrightarrow \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

$A = \lambda Q$ mit $Q \in O(3)$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ impliziert:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|Ax\| &= \|\lambda Qx\| = |\lambda| \|Qx\| = |\lambda| \|x\|, \\ \|Ay\| &= \|\lambda Qy\| = |\lambda| \|y\|, \\ Ax \cdot Ay &= \lambda Qx \cdot \lambda Qy = \lambda^2 (Qx \cdot Qy) = \lambda^2 (x \cdot y), \\ \Rightarrow \frac{Ax \cdot Ay}{\|Ax\| \cdot \|Ay\|} &= \frac{\lambda^2 (x \cdot y)}{|\lambda|^2 \|x\| \cdot \|y\|} = \frac{x \cdot y}{\|x\| \cdot \|y\|}, \text{ da } \lambda^2 = |\lambda|^2. \end{aligned}$$

Da $\lambda \neq 0$ ist A offensichtlich invertierbar. ($A^{-1} = \lambda^{-1} Q^T$)

c) Allgemein gilt: $A = \lambda Q$

$$\Rightarrow \det A = \det(\lambda Q) = \lambda^n \det Q$$

Wir wissen: $|\det Q| = 1$. Also folgt

$$\begin{aligned} |\det A| &= |\lambda|^n \\ \Leftrightarrow |\det A|^{\frac{1}{n}} &= |\lambda| \end{aligned}$$

Hier in unserem Beispiel gilt: $\det A = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2^{3/2} > 0$.

Behauptung: $\lambda = \sqrt{2} = 2^{1/2}$. Denn

$$(\det A)^{1/3} = (2^{3/2})^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{2}}_{\lambda} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{Q \in O(3)!}.$$

Beachte: $\lambda = \sqrt{2}$ = Länge der Spaltenvektoren von A !

Im Allgemeinen muss man das Vorzeichen von λ prüfen. Hier ist das klar wegen $n = 3$!