Aufgabe 14: Thema: Normalengleichungssystem

Sei A eine $m \times n$ Matrix. Betrachten Sie das Normalengleichungssystem

$$A^T Ax = A^T b$$

für $b \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen sind richtig?

a) Das Normalengleichungssystem ist für alle $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar.
ja ☐ nein ☐

b) Für $b = 0$ hat das System stets nur die triviale Lösung.
ja ☐ nein ☐

c) Ax ist eindeutig bestimmt, auch wenn es mehrere Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ gibt.
ja ☐ nein ☐

d) Gilt Rang von A gleich n, dann ist $A^T A$ positiv definit.
ja ☐ nein ☐

e) Ist A eine symmetrische $n \times n$ Matrix, dann ist jede Lösung des Systems auch Lösung von $Ax = b$. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:Die Antworten lauten:

a) Ja!

b) Nein!

c) Ja! Seien x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $A^T Ax = A^T b$. Dann folgt daraus

$$\begin{array}{rrcl} \Rightarrow & A^T A(x_1 - x_2) & = & 0 \\ \Rightarrow & (x_1 - x_2)A^T A(x_1 - x_2) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \|A(x_1 - x_2)\|^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & A(x_1 - x_2) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & Ax_1 & = & Ax_2 \end{array}$$

d) Ja! Rang von A gleich n, daraus folgt:

$$Ax = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\Rightarrow A^T Ax \cdot x = \|Ax\|^2 \neq 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

Zudem wissen wir, dass die Matrix $A^T A$ positiv semidefinit ist und somit ist $A^T A$ positiv definit.

e) Nein! Beispiel: A sei die Nullmatrix.

Aufgabe 15: Betrachten Sie den Vektorraum

$$V = \{f : [0, \pi] \to \mathbb{R} \mid f(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \sin(2x) + c_3 \sin(3x) \;\text{ mit }\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Funktionen

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \sin(x) \\ v_2(x) &= \sin(2x) \\ v_3(x) &= \sin(3x) \end{aligned}$$

bilden offenbar eine Basis des Vektorraums V.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2 und v_3 bezüglich des Skalarproduktes

$$g(v, w) = \int_0^\pi v(x)w(x)\,\mathrm{d}x$$

orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (ONB) dieses Vektorraums.

c) Berechne Sie die orthogonale Projektion der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & : \; x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & : \; x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

auf den Vektorraum V bezüglich $g(\cdot, \cdot)$.

Tipp: Zeigen Sie zunächst

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)\right).$$

Lösung:Zuerst beweisen wir die im Tipp aufgestellte Behauptung:

Sei a, $b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$

$$\begin{aligned} \sin(ax) &= \frac{1}{2i}\left(e^{iax} - e^{-iax}\right) \\ \sin(bx) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ibx} - e^{-ibx}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \sin(ax)\sin(bx) &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\left(e^{i(a+b)x} + e^{-i(a+b)x}\right)}{2} - \frac{\left(e^{i(a-b)x} + e^{-i(a-b)x}\right)}{2}\right], \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right) \end{aligned}$$

a)

$$
\begin{aligned}
g(\sin(ax), \sin(bx)) &= \int_0^\pi \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(\cos\left((a-b)x\right) - \cos\left((a+b)x\right)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2(a-b)}\left[\sin\left((a-b)x\right)\right]_0^\pi - \frac{1}{2(a+b)}\left[\sin\left((a+b)x\right)\right]_0^\pi = 0.
\end{aligned}
$$

weil $a - b \neq 0$ und $a + b \neq 0$. Daraus folgt, dass die Funktionen v_1, v_2 und v_3 bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot,\cdot)$ orthogonal sind.

b) Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, bilden sie also eine orthogonale Basis und wir müssen nur noch normieren:

Die normierte Basis, nennen wir sie w_1, w_2, w_3, erhalten wir wie folgt:

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(x),\, \sin(x))}}\sin(x) \\
w_2 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(2x),\, \sin(2x))}}\sin(2x) \\
w_3 &= \frac{1}{\sqrt{g(\sin(3x),\, \sin(3x))}}\sin(3x)
\end{aligned}
$$

Sei $a \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
g(\sin(ax), \sin(ax)) &= \int_0^\pi \sin(ax)\sin(ax)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left((2a)x\right)\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x\right]_0^\pi - \frac{1}{2a}\left[\sin\left(2ax\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

und dann

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x) \\
w_2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x) \\
w_3 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(3x)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Wenn die Basis nicht bereits orthogonal wäre, könnten wir das Gram-Schmidt-Verfahren benutzen. Dieses funktioniert mit dem Skalarprodukt $g(\cdot,\cdot)$ analog zum Vorgehen im $\mathbb{R}^3$.

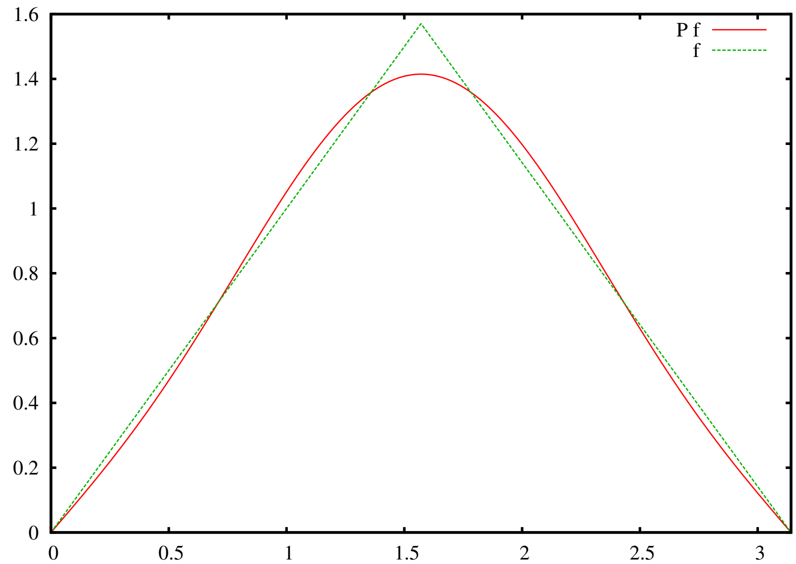
c) Die orthogonale Projektion der Funktion $f(x)$ auf den Vektorraum V bzgl. des Skalarproduktes $g(\cdot,\cdot)$ berechnet sich wie folgt

$$
Pf(x) = g(f(x), w_1(x))w_1(x) + g(f(x), w_2(x))w_2(x) + g(f(x), w_3(x))w_3(x)
$$

$$
\begin{aligned}
g(f(x), w_1(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_1(x) \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-x\cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \,\mathrm{d}x \right) \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \\
g(f(x), w_2(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_2(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2x) \right) \,\mathrm{d}x \\
&= 0 \\
g(f(x), w_3(x)) &= \int_0^{\pi} f(x) w_3(x) \,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(3x) \,\mathrm{d}x \\
&= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-\frac{1}{3} x \cos(3x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(3x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
Pf(x) &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} w_1(x) - \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi}} w_3(x) \\
&= \frac{4}{\pi} \sin(x) - \frac{4}{9\pi} \sin(3x)
\end{aligned}
$$



Aufgabe 16: Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

$$A = A^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = 3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad\qquad Q^{(1)} = \mathbb{1} - \frac{1}{12} v_1 v_1^T$$

$$\begin{aligned}
Q^{(1)} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 && = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \\
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 6 && = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\
Q^{(1)} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} 12 && = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = -5, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad\qquad Q^{(2)} = \mathbb{1} - \frac{1}{40} v_2 v_2^T$$

$$\begin{aligned}
Q^{(2)} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} 0 && = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \\
Q^{(2)} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} 40 && = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \\
Q^{(2)} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} 40 && = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$R = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17: Es seien u, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $u \neq v$ und $||u|| = ||v||$. Weiter sei $n := u - v$.

a) Zeigen Sie, daß für die durch $S_n x := x - 2\frac{x \cdot n}{||n||^2} n$ definierte Spiegelungsmatrix S_n gilt $S_n u = v$ und $S_n v = u$.

b) Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie v der Form $v = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\|u\| = \|v\|$. Berechnen Sie die Matrix S_{u-v} aus Aufgabenteil (a).

c) Multiplizieren Sie diese Matrix von links an die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned} S_n u &= u - 2\frac{u \cdot n}{\|n\|^2} n = u - \frac{2u \cdot (u - v)}{\|u - v\|^2} \cdot (u - v) \\ 2u \cdot (u - v) &= 2\|u\|^2 - 2u \cdot v\,. \\ \|u - v\|^2 &= \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 = 2\|u\|^2 - 2u \cdot v \quad \text{wegen } \|u\| = \|v\|\,. \\ \Rightarrow\ S_n u &= u - (u - v) = u - u + v = v\,. \end{aligned}$$

Ebenso gilt:

$$S_n v = u\,,$$

wegen $2v \cdot n = 2v \cdot (u - v) = 2uv - 2\|v\|^2$ und $\|u\|^2 - 2uv + \|v\|^2 = 2\|v\|^2 - 2uv = \|u - v\|^2$.

b)

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ \Leftrightarrow\ \sqrt{1^2 + (-1)^2} &= |\alpha| \\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2} &= |\alpha| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die Matrix S_{u-v} berechnen zu können, führen wir zuerst ein paar Nebenrechnungen durch:

$$u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(u-v)(u-v)^T = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}, & -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|u-v\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{2} + 2 + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{u-v} &= \mathbb{1} - 2\frac{(u-v)(u-v)^T}{\|u-v\|^2} \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\sqrt{2})^2 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2-\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & 1-\frac{1}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S_{u-v}A &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$