Aufgabe 18: Thema: Orthonormalsystem und orthogonale Projektion

Sei V ein euklidischer Raum und $U = \mathrm{span}\{u_1, ..., u_n\}$ ein Unterraum, wobei $\{u_1, ..., u_n\}$ ein Orthonormalsystem sei. Welche Aussagen sind richtig?

a) Wenn $v \in V$ und $v \cdot u_i = 0$ für $i = 1, ..., n$, dann ist $v = 0$.
ja ☐ nein ☐

b) Die orthogonale Projektion $Pv \in U$ eines Vektors $v \in V$ ist eindeutig bestimmt und es gilt: $Pv = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot u_i) u_i$.
ja ☐ nein ☐

c) Für $v, w \in V$ gilt: $Pv \cdot Pw = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot u_i)(w \cdot u_i)$.
ja ☐ nein ☐

d) Wenn $v \in V$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

e) Wenn $v \in U$, dann gilt: $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (v \cdot u_i)^2$.
ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:Die Antworten lauten: a) Nein! b) Ja! c) Ja! d) Nein! e) Ja!

Aufgabe 19: Betrachten Sie die Graphen der beiden Funktionen

$$z(x,y) = xy \quad \text{und} \quad w(u,v) = u^2 - v^2.$$

a) Skizzieren Sie einige Niveaulinien der beiden Funktionen, also einige der Mengen $N_{\{z=c\}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z(x,y) = xy = c = \text{const}\}$ bzw. $N_{\{w=c\}} := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid w(u,v) = u^2 - v^2 = c = \text{const}\}$, zum Beispiel für $c = 1, 10, 100$.

b) Mit welchen Transformationen bildet man Niveaulinien von w auf Niveaulinen von z ab und umgekehrt?

c) Welche 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ erfüllt folgende Bedingungen:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Setzen Sie $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

d) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen $D\mathbf{f}$, $D\mathbf{g}$ der Parametrisierungen

$$(x,y) \mapsto \mathbf{f}(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix} \quad , \quad (u,v) \mapsto \mathbf{g}(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

e) Bestätigen Sie mit der Kettenregel die Beziehungen

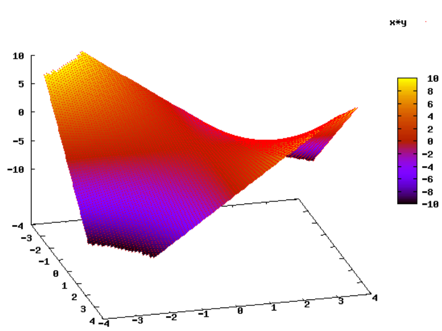
$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{A})(x,y) = D\mathbf{g}(u,v) \cdot \mathbf{A} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

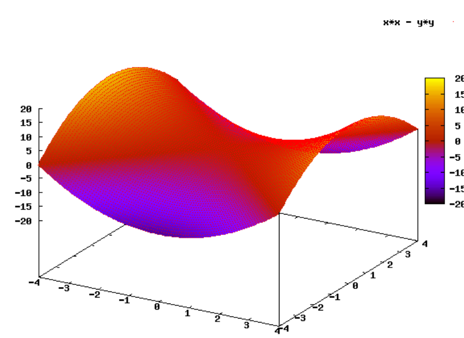
$$D(\mathbf{f} \circ \mathbf{A}^{-1})(u,v) = D\mathbf{f}(x,y) \cdot \mathbf{A}^{-1} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG:

a) $N_{\{z=c\}}$ sind Hyperbeln der Form $y = \frac{c}{x}$. $N_{\{w=c\}}$ sind Kurven der Form $v = \sqrt{u^2 - c}$.

Die Graphen der beiden Funktionen sehen wie folgt aus:





b) Die Niveaulinien gehen auseinander hervor, indem man

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v \\ \Rightarrow xy &= (u+v)(u-v) = u^2 - v^2 \end{aligned}$$

ausdrückt. Das entspricht

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(x+y) \\ v &= \frac{1}{2}(x-y) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =: \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit entspricht A einer Spiegelung an der y-Achse (die jedoch die Niveaulinien von w unverändert lasst) gefolgt von einer Rotation um 45 Grad gefolgt von einer Skalierung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dass die Niveaulinien auf diese Weise auseinander hervorgehen, sieht man, indem man betrachtet, wie die Graphen auseinander hervorgehen:

c)

$$A = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right) = A \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} x+y \\ x-y \end{array}\right).$$

d)

$$Df(x,y) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{array}\right),$$

$$Dg(u,v) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{array}\right).$$

e)

$$
\begin{aligned}
Dg(u,v)\cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2(u-v) & 2(u+v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ u-v & u+v \end{pmatrix}, \\
(g\circ A)(x,y) &= g\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x-y) \\ \frac{1}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x-y) \\ xy \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \ D(g\circ A)(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ u-v & u+v \end{pmatrix}, \text{ denn} \\
u+v &= \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = x\,, \\
u-v &= \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = y\,. \\
A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
Df(x,y)\cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y+x & y-x \end{pmatrix}, \\
D(f\circ A^{-1})(u,v) &= D\begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ y+x & y-x \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20: Betrachten Sie die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Ursprung.

a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalbasis die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

c) Geben Sie die Ebene in der Form $\{x|x \cdot n = d\}$ an.

d) Berechnen Sie mit Hilfe von n erneut die Projektion des Punktes $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ auf diese Ebene.

LÖSUNG:

a)

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\tilde{v}_2 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} \\
v_2 &= \frac{1}{\|\tilde{v}_2\|} \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die beiden Vektoren v_1 und v_2 bilden eine Orthonormalbasis der Ebene.

b) Die Projektion des Punktes p auf die Ebene berechnet sich wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(p \cdot v_1)v_1 + (p \cdot v_2)v_2 &= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c)

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{1}{\|\tilde{n}\|}\tilde{n} = \frac{1}{\sqrt{32}} \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Die Ebene lässt sich also schreiben als

$$\left\{ x \,\middle|\, x \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

d)

$$\begin{aligned} p - (p \cdot n)n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 21: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & , x = y = 0 \\ xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechne Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x} f(0,y)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x,0)$ mit Hilfe von Differenzenquotienten. Berechnen Sie anschließend $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0)$.

LÖSUNG:

$$\frac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \frac{f(h,y)}{h} = y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}$$

Für $y \neq 0$ gilt:

$$y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} \to y\frac{-y^2}{y^2} = -y \qquad \text{für } h \to 0.$$

Für $y = 0$ gilt:

$$\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0,y) = -y$$

$$\frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \frac{f(x,h)}{h} = x\frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2}$$

Für $x \neq 0$ gilt:

$$x\frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2} \to x\frac{x^2}{x^2} = x \qquad \text{für } h \to 0.$$

Für $x = 0$ gilt:

$$\frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2} = \frac{-h^2}{h^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad x\frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2} = 0$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,0) = x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(-y)\bigg|_{y=0} = -1$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(x)\bigg|_{x=0} = 1$$