Aufgabe 31: Sei A eine $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\det A \neq 0$. Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$f(x) := \|Ax\|^2 - 2Ax \cdot b$$

genau einen Minimierer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ hat.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x) &= \|Ax\|^2 - 2Ax \cdot b = Ax \cdot Ax - 2Ax \cdot b \\ &= A^T Ax \cdot x - 2Ax \cdot b \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für die Existenz eines Minimierers ist

$$\operatorname{grad} f(x) = 2\left(A^T Ax - A^T b\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \in \mathbb{R}^n \,! \Leftrightarrow \quad A^T Ax = A^T b \text{ (Normalgleichungen-System) } (*)$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ Lösung von $(*)$. Wir wissen $D^2 f(x) = 2A^T A$ ist positiv semidefinit und da zusätzlich $\det A = \det A^T \neq 0$ gilt ist $D^2 f(x) = 2A^T A$ positiv definit, so dass x_0 ein (lokales) Minimum von f ist.
Außerdem wissen wir: $\det A \neq 0$ bedeutet, dass A invertierbar ist. D.h. wir können aus $\det A^T = \det A \neq 0$ die Invertierbarkeit von A^T schließen.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A^T Ax = A^T b \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1} b, \end{aligned}$$

d.h. x_0 ist eindeutig bestimmt.
Beachte:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= A(x+h) \cdot A(x+h) - 2A(x+h) \cdot b \\ &= Ax \cdot Ax + Ah \cdot Ax + Ax \cdot Ah + Ah \cdot Ah - 2Ax \cdot b - 2Ah \cdot b \\ &= f(x) + \underbrace{2\left(A^T Ax - A^T b\right)}_{= \operatorname{grad} f(x)} \cdot h + \underbrace{\|Ah\|^2}_{= O(\|h\|^2)} \end{aligned}$$

Aufgabe 32: a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = \cos(x)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ mit Restglied $O(|x - x_0|^{2n})$.

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$g : (x, y) \mapsto g(x, y) = \cos(x)\cos(y)$$

die Taylor-Entwicklung an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$ mit Restglied der Ordnung 3.

LÖSUNG:

a) Die Formel für die Taylor-Entwicklung bis Ordnung n an einem Punkt x_0 ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i + O(|x-x_0|^{n+1}) \\ &= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i + O(|x-x_0|^{n+1}) \end{aligned}$$

wobei $f^{(i)}(x_0)$ die $i$te Ableitung an der Stelle x_0 ist.

$$\begin{aligned} f'(x_0) = f^{(1)}(x_0) &= -\sin(x_0) \\ f''(x_0) = f^{(2)}(x_0) &= -\cos(x_0) \\ f^{(3)}(x_0) &= \sin(x_0) \\ f^{(4)}(x_0) &= \cos(x_0) \end{aligned}$$

und dann für alle $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f^{(2t-1)}(x_0) &= (-1)^t \sin(x_0) \\ f^{(2t)}(x_0) &= (-1)^t \cos(x_0) \end{aligned}$$

Für $x_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} f^{(2t-1)}(\frac{\pi}{2}) &= (-1)^t \\ f^{(2t)}(\frac{\pi}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

und die Taylor-Entwicklung bis Ordnung $(2n-1)$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ ist:

$$f(x) = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(2t-1)!}(-1)^t (x-\frac{\pi}{2})^{(2t-1)} + O\left(\left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{2n}\right)$$

b) Die Taylor-Entwicklungsformel für g an der Stelle x_0 ist:

$$g(x_0+\xi, y_0+\zeta) = g(x_0,y_0) + \sum_n \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha g}{\partial(x,y)^\alpha}(x_0,y_0)(\xi,\zeta)^\alpha + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^{n+1}\right)$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2) \\ \alpha! &= \alpha_1!\alpha_2! \\ \frac{\partial^\alpha g}{\partial(x,y)^\alpha} &= \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}} \\ (\xi,\zeta)^\alpha &= \xi^{\alpha_1}\zeta^{\alpha_2} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
g(\xi,\zeta) = g(0,0) &+ \frac{\partial}{\partial x} g(0,0)\xi + \frac{\partial}{\partial y} g(0,0)\zeta \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(0,0)\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g(0,0)\xi\zeta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} g(0,0)\zeta^2 + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^3 \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) &= -1 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) &= 0 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(0,0) &= -1
\end{aligned}
$$

und somit

$$
g(\xi,\zeta) = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2}\zeta^2 + O\left(\left\| \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right\|^3 \right)
$$

Aufgabe 33: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Entwicklen Sie die Funktion $f(x) = \|x - a\|$ nach Taylor an der Stelle x_0 bis einschließlich Terme zweiter Ordnung.

LÖSUNG:

$$
f(x) = \|x - a\| = \left((x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}
$$

setze $x = x_0 + h, h \in \mathbb{R}^n$

$$
f(x_0 + h) = f(x_0) + \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} D^2 f(x_0) h \cdot h + O(\|h\|^3)
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(x) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right)^T \\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|x - a\|} \cdot 2(x_1 - a_1), \ldots, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|x - a\|} \cdot 2(x_n - a_n) \right)^T \\
&= \left(\frac{x_1 - a_1}{\|x - a\|}, \ldots, \frac{x_n - a_n}{\|x - a\|} \right)^T = \frac{1}{\|x - a\|}(x - a)
\end{aligned}
$$

$$
H(x) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x) & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} f(x)
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{(x_i - a_i)}{f(x)} \\
&= \frac{1}{f(x)} - \frac{(x_i - a_i)(x_i - a_i)}{f^3(x)} \\
&= \frac{1}{\|x-a\|} - \frac{1}{\|x-a\|^3}(x_i - a_i)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) &= \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x)^3}(x_i - a_i)^2 \\
i \neq j: \qquad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{(x_i - a_i)}{f(x)} \\
&= -\frac{1}{f^3(x)}(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\
&= -\frac{(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{\|x-a\|^3}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow H(x) = \frac{1}{\|x-a\|}\left(\mathbb{1} - \frac{(x-a)}{\|x-a\|}\frac{(x-a)^T}{\|x-a\|}\right)
$$

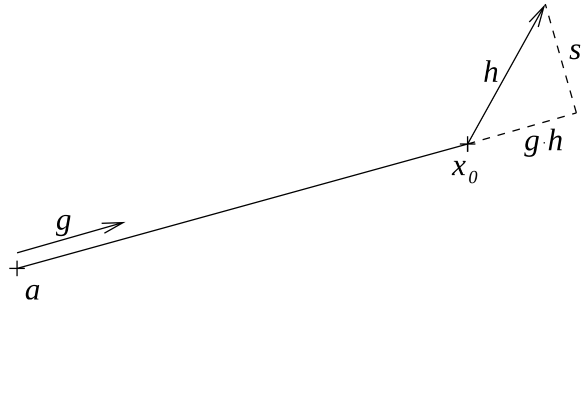
Insgesamt ergibt sich

$$
f(x_0 + h) = \|x_0 - a\| + \frac{(x_0 - a)}{\|x_0 - a\|} \cdot h + \frac{1}{2\|x_0 - a\|}\left(\mathbb{1} - \frac{(x-a)}{\|x-a\|}\frac{(x-a)^T}{\|x-a\|}\right) h \cdot h + O(\|h\|^3)
$$

Zusätzliche Erläuterung: (Nicht Teil der Lösung!)
Mit der Bezeichnung $g = \operatorname{grad} f(x_0)$ erhalten wir

$$
f(x_0 + h) = f(x_0) + g \cdot h + \frac{1}{2\|x_0 - a\|}\left(\|h\|^2 - (g \cdot h)^2\right) + (\|h\|^3)\,.
$$

Dabei ist offenbar $\|g\| = 1$, also ist g der Einheitsvektor, der von a in Richtung x_0 zeigt. Der lineare Term (also die Approximation der Änderung in erster Ordnung) ist daher die Projektion von h auf die Gerade durch x_0 und a. Hier spielt also nur der Anteil von h eine Rolle, der auf a zu oder von a weg zeigt, nicht der Anteil „seitwärts“.
In ähnlicher Weise erklärt sich der quadratische Term: Mit $s^2 = \|h\|^2 - (g \cdot h)^2$ ist s der „Seitwärts-Anteil“ von h (Pythagoras!). Der Term zweiter Ordnung berücksichtigt also die Änderung „seitwärts“.
Die Skalierung überlegt man sich beispielsweise folgendermaßen: Mit $a = (0,0)^T$, $x_0 = (1,0)^T$ und $h = (t,s)^T$ erhält man $f(x_0 + h) = 1 + t + \frac{1}{2}s^2 + O(\|h\|^3)$. Zu $x_0 = (L,0)^T$ erhält man die skalierte Gleichung $\frac{f(x_0+h)}{L} = 1 + \frac{t}{L} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{L}\right)^2 + O(\|h\|^3)$. Multiplikation mit $L = \|x_0 - a\|$ ergibt schließlich die obige Form.



Aufgabe 34: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \cos(x) + \sin(2y)$$

und finden Sie im Intervall $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ Minima, Maxima und Sattelpunkte von f.

Lösung: Kritische Punkte von f sind diejenigen Punkte (x, y) mit $\nabla f(x,y) = 0$.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ 2\cos(2y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \pi \text{ und } y \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$$

Die verschiedenen Möglichkeiten sind:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{5\pi}{4} \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{7\pi}{4} \end{pmatrix}$$

Es ist

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -4\sin(2y) \end{pmatrix}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_1 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{3\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_2 \text{ ist ein Minimum}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{ist indefinit, d.h. } A_3 \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

$$D^2 f\left(\pi, \frac{7\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit, d.h. } A_4 \text{ ist ein Minimum}$$