Aufgabe 46: Gesucht ist die Schnittmenge der beiden Zylinder

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Schnittmenge aus zwei geschlossenen Kurven besteht und jede der beiden Kurven durch einen Schnitt einer Ebene mit einem Zylinder beschrieben werden kann.

(ii) Finden Sie eine Parameterdarstellung für beide Schnittkurven.

(iii) Bestimmen Sie mit dem **Satz über implizite Funktionen** die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.
Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

Aufgabe 47: Betrachten Sie die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &h(x,y,z) := (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\,, \\ &g(x,y,z) := x - 1 = 0\,, \\ &\mathbf{f}(x,y,z) := \begin{pmatrix} h(x,y,z) \\ g(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?

b) Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über z bzw. über y.

c) Bestimmen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.

Tipp: Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

Aufgabe 48: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\nabla f(x, y, z) \neq 0$.

a) Bestimmen Sie für die durch $f(x, y, z) = 0$ gegebene Fläche die Tangentialebene in einem Punkt (x_0, y_0, z_0) mit

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

indem Sie die Fläche als Graph einer Funktion über der xy-Ebene darstellen und den Tangentialraum an die Graphenfläche berechnen. Verwenden Sie den Satz über impliziten Funktionen, um die auftretenden partiellen Ableitungen dieser unbekannten Funktion durch partielle Ableitungen von f auszudrücken.

b) Was ergibt sich für das Ellipsoid mit der Gleichung

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a, b, c)$?

Aufgabe 49: a) Betrachten Sie das Gravitationspotential

$$U(x) = U(x, y, z) := \frac{mG}{||x - a||} = \frac{mG}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2}}$$

eines Punktes $a \in \mathbb{R}^3$ der Masse $m > 0$. Die positive Konstante G mit dem Wert $G = (6672 \pm 4)10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$ ist die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass die Niveauflächen

$$\mathcal{F}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : U(x) = c\}$$

von U für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen sind. Um welche Flächen handelt es sich?

b) Das Gravitationspotential zweier Punkte $a, b \in \mathbb{R}^3$ $(a \neq b)$ der Massen $m_1 = m_2 = m > 0$ lautet

$$V(x) = V(x, y, z) := \frac{m_1 G}{||x - a||} + \frac{m_2 G}{||x - b||}$$

Sind die Niveauflächen $\mathcal{S}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = c\}$ von V wiederum für jedes $c > 0$ zweidimensionale Flächen?