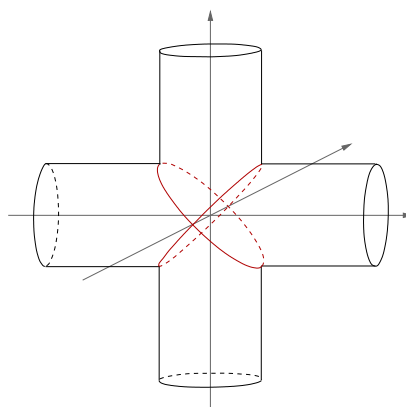


**Aufgabe 46:** Gesucht ist die Schnittmenge der beiden Zylinder

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 1, \\x^2 + z^2 &= 1.\end{aligned}$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Schnittmenge aus zwei geschlossenen Kurven besteht und jede der beiden Kurven durch einen Schnitt einer Ebene mit einem Zylinder beschrieben werden kann.
- (ii) Finden Sie eine Parameterdarstellung für beide Schnittkurven.
- (iii) Bestimmen Sie mit dem **Satz über implizite Funktionen** die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.  
**Tipp:** Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

LÖSUNG:



- (i) Subtraktion der beiden Gleichungen liefert  $y^2 = z^2$ . Also gilt für alle Punkte der Schnittmenge  $y = \pm z$ . Somit liegt die Schnittmenge der beiden Zylinder in der Vereinigung der beiden Ebenen

$$\begin{aligned}y - z &= 0, \\y + z &= 0,\end{aligned}$$

und die Schnittmenge der beiden Zylinder liegt natürlich auch im Zylinder  $x^2 + y^2 = 1$ . Umgekehrt folgt durch Rechnung, dass jeder Punkt, der auf diesem Zylinder und in einer der beiden Ebenen liegt, auch auf dem anderen Zylinder liegt.

- (ii) Wir können den Zylinder  $x^2 + y^2 = 1$  in Parameterform

$$\begin{aligned}x &= \cos s, \\y &= \sin s, \\z &= t\end{aligned}$$

schreiben. Die Bedingung  $y = \pm z$  liefert als Parameterdarstellung der beiden Schnittkurven

$$\begin{aligned}x &= \cos s, \\y &= \sin s, \\z &= \pm \sin s\end{aligned}$$

- (iii) Bestimmen Sie mit dem **Satz über implizite Funktionen** die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.

Die Schnittmenge der beiden Zylinder ist gegeben durch

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\},$$

wobei

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$Df(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

ist der Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $(x, y, z)$  gegeben durch

$$\begin{aligned}T_{(x,y,z)}M &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ -xy \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Wie wir aus Aufgabenteil (i) wissen, muss gelten  $y = \pm z$ , damit  $(x, y, z) \in M$  liegt. D.h.

$$\begin{aligned}T_{(x,z,z)}M &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} z^2 \\ -xz \\ -xz \end{pmatrix} \right\} \\ T_{(x,-z,z)}M &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -z^2 \\ -xz \\ xz \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

Wir müssen jedoch aufpassen an den Punkten  $(1, 0, 0)$  und  $(-1, 0, 0)$ . Nach dem, was wir gerade eben berechnet haben wäre  $(0, 0, 0)$  in beiden Fällen der Tangentialvektor, was nicht sein kann. Der Grund dafür, dass wir an diesen beiden Stellen ein falsches Ergebnis berechnen, liegt darin, dass

$$DF((1, 0, 0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad DF((-1, 0, 0)) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen ist der  $\text{Rang}(DF) = 1$ , so dass die Voraussetzungen für den Satz über implizite Funktionen nicht erfüllt sind.

**Aufgabe 47:** Betrachten Sie die Gleichungen:

$$h(x, y, z) := (x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

$$g(x, y, z) := x - 1 = 0,$$

$$\mathbf{f}(x, y, z) := \begin{pmatrix} h(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Geben Sie eine geometrische Interpretation der Situation an. Welche Figuren schneiden sich hier? Was ist die Schnittmenge dieser Figuren?
- Beschreiben Sie die Schnittmenge vollständig (in insgesamt 4 Stücken) als Funktionen über  $z$  bzw. über  $y$ .
- Bestimmen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen die Tangentenvektoren an die Schnittmenge.

**Tipp:** Fertigen Sie eine Skizze der Situation an!

LÖSUNG:

- a)  $h(x, y, z) = (x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$  beschreibt eine Kugel  $B_R(M) \subset \mathbb{R}^3$  mit Radius  $R = 2$  ( $R^2 = 4!$ ) und Mittelpunkt  $M = (2, 0, 0)^T$ .

$g(x, y, z) = x - 1 = 0$  beschreibt die Ebene  $x = 1$ , die parallel zur  $y$ - $z$ -Ebene ist und den Abstand 1 von dieser Ebene hat.

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} h(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt die Schnittmenge beider Figuren:

Die Schnittmenge ist ein Kreis in der Ebene  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} 0 &= h(1, y, z) = (1 - 2)^2 + y^2 + z^2 - 4 \\ &= 1 - 4 + y^2 + z^2 \\ &= y^2 + z^2 - 3 \\ &\Leftrightarrow y^2 + z^2 = 3. \end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis vom Radius  $\tilde{R} = \sqrt{3}$  mit Mittelpunkt  $\tilde{M} = (1, 0, 0)^T$  im  $\mathbb{R}^3$ .

- b) Offensichtlich gilt:

$$z^2 = 3 - y^2 \Rightarrow z = z(y) = \pm\sqrt{3 - y^2} \quad \text{für } |y| \leq \sqrt{3}$$

Entsprechend:

$$y^2 = 3 - z^2 \Rightarrow y = y(z) = \pm\sqrt{3 - z^2} \quad \text{für } |z| \leq \sqrt{3}.$$

Beachte: Wegen der  $\pm$  erhalten wir in der Tat 4 Funktionen und damit die gesuchten 4 Stücke!

Genauer gilt: Die Schnittmenge wird parametrisiert durch folgende 4 Stücke als Graph jeweils einer Funktion von einer (geeigneten) Variablen:

$$\begin{aligned} \gamma_1(z) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3-z^2} \\ z \end{pmatrix} & \dot{\gamma}_1(z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } |z| < \sqrt{3}, \\ \gamma_2(z) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3-z^2} \\ z \end{pmatrix} & \dot{\gamma}_2(z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} & \text{für } |z| < \sqrt{3}, \\ \gamma_3(y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \sqrt{3-y^2} \end{pmatrix} & \dot{\gamma}_3(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} & \text{für } |y| < \sqrt{3}, \\ \gamma_4(y) &= \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ -\sqrt{3-y^2} \end{pmatrix} & \dot{\gamma}_4(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} & \text{für } |y| < \sqrt{3}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= 3 \quad \text{und} \quad z = z(y) \\ \Rightarrow 2y + 2zz' &= 0 \quad \Rightarrow \quad z' = -\frac{y}{z}. \end{aligned}$$

Also gilt:  $z'(y) = -\frac{y}{z(y)} = -\frac{y}{\pm\sqrt{3-y^2}}$ .

**Probe:**

$$\begin{aligned} z(y) &= \pm\sqrt{3-y^2} \\ \Rightarrow z'(y) &= \pm\frac{1}{2\sqrt{3-y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{z(y)}. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für  $y = y(z)$ :

$$2yy' + 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(z) = -\frac{z}{y(z)} = -\frac{z}{\pm\sqrt{3-z^2}}.$$

Dies führt auf die oben schon berechneten Tangentenvektoren  $\dot{\gamma}_1$  bis  $\dot{\gamma}_4$  an die

Schnittmenge:

$$\begin{aligned}\hat{\gamma}_1(z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}. \\ \hat{\gamma}_2(z) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\sqrt{3-z^2}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |z| < \sqrt{3}. \\ \hat{\gamma}_3(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}. \\ \hat{\gamma}_4(y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{y}{\sqrt{3-y^2}} \end{pmatrix} \quad \text{für } |y| < \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis (bis auf eine Skalierung der Tangentialvektoren) ergibt sich aus dem Satz über implizite Funktionen (und seinen Folgerungen): Wir setzen  $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{f}(x, y, z) = 0\}$  und beachten, dass

$$\nabla g(x, y, z) = (1, 0, 0), \quad \nabla h(x, y, z) = 2(x - 2, y, z)$$

ist. Auf  $M$  gilt deshalb

$$D\mathbf{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \nabla h(x, y, z) \\ \nabla g(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-2) & 2y & 2z \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und diese  $2 \times 3$ -Matrix hat auf  $M$  überall den Rang 2! Daraus ergibt sich (wie in der Vorlesung und im Skript)

$$\begin{aligned}T_{(x,y,z)}M &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &\stackrel{(x,y,z) \in M}{\Rightarrow x=1} \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

Beachte: Tangentialvektoren an die Schnittmenge sind die Vektoren, die gleichzeitig senkrecht zu  $\nabla h(x, y, z)$  und  $\nabla g(x, y, z)$  stehen. Einen solchen Vektor erhält man, indem man das Kreuzprodukt der beiden Vektoren  $\nabla h(x, y, z)$  und  $\nabla g(x, y, z)$  bildet.

**Aufgabe 48:** Es sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion mit  $\nabla f(x, y, z) \neq 0$ .

- a) Bestimmen Sie für die durch  $f(x, y, z) = 0$  gegebene Fläche die Tangentialebene in einem Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  mit

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

indem Sie die Fläche als Graph einer Funktion über der  $xy$ -Ebene darstellen und den Tangentialraum an die Graphenfläche berechnen. Verwenden Sie den Satz über impliziten Funktionen, um die auftretenden partiellen Ableitungen dieser unbekanntenen Funktion durch partielle Ableitungen von  $f$  auszudrücken.

- b) Was ergibt sich für das Ellipsoid mit der Gleichung

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

an der Stelle  $(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a, b, c)$ ?

LÖSUNG:

- a) Nach Voraussetzung gilt:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ und } \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

daher kann lokal (d. h. in einer geeigneten Umgebung des Punktes  $(x_0, y_0, z_0)$ )  $z = g(x, y)$  geschrieben werden und die durch „ $f(x, y, z) = 0$ “ definierte Fläche wird lokal als Graph der Funktion  $z = g(x, y)$  gegeben. Wir suchen also die Tangentialebene an den Graphen

$$G_g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix}.$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$T_{(x,y,g(x,y))}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix} + v \mid v \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x, y) \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x g(x_0, y_0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x g(x_0, y_0) \\ -\partial_y g(x_0, y_0) \\ 1 \end{pmatrix}$$

steht also senkrecht auf der Tangentialebene an den Graphen  $G_g$  im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$ . Daraus folgt

$$T_{(x_0, y_0, z_0)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -\partial_x g(x_0, y_0) x - \partial_y g(x_0, y_0) y + z = d \right\},$$

wobei  $d$  noch zu bestimmen ist. Da der Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  auf der Tangentialebene liegt, gilt

$$d = -\partial_x g(x_0, y_0) x_0 - \partial_y g(x_0, y_0) y_0 + z_0.$$

$$\Rightarrow T_{(x_0, y_0, z_0)} G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z - z_0 = \partial_x g(x_0, y_0) (x - x_0) + \partial_y g(x_0, y_0) (y - y_0) \right\}$$

Aus  $0 = f(x, y, g(x, y))$  folgt nach der Kettenregel (und dem Satz über implizite Funktionen):

$$\partial_x g(x_0, y_0) = -\frac{\partial_x f(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{und} \quad \partial_y g(x_0, y_0) = -\frac{\partial_y f(x_0, y_0, z_0)}{\partial_z f(x_0, y_0, z_0)}$$

Setzt man dies ein und multipliziert mit  $\partial_z f(x_0, y_0, z_0)$  (was nach Voraussetzung  $\neq 0!$ ), ergibt sich

$$T_{(x_0, y_0, z_0)} G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Bemerkung:

Im Graphenfall wird die Tangentialebene an den Graphen meist wie oben angegeben definiert, doch es gibt auch Definitionen ohne Aufpunkt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ .

In diesem Fall gilt  $d = 0$ , so dass der Abschnitt zur Berechnung von  $d$  wegfällt und sich folgende Lösung ergibt:

$$T_{(x_0, y_0, z_0)} G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

b) Wir setzen natürlich  $a, b, c > 0$  voraus.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 1 = 0 \quad \checkmark, \\ \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right), \\ \nabla f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{a} \left( x - \frac{a}{\sqrt{3}} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{b} \left( y - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{c} \left( z - \frac{c}{\sqrt{3}} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}a} \left( x - \frac{a}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}b} \left( y - \frac{b}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}c} \left( z - \frac{c}{\sqrt{3}} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}a} x + \frac{1}{\sqrt{3}b} y + \frac{1}{\sqrt{3}c} z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$T_{\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)}G_g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3} \right\}$$

ist damit die Tangentialebene im Punkt  $\frac{1}{\sqrt{3}}(a, b, c)$  an das Ellipsoid.

Bemerkung:

Analog zum vorherigen Aufgabenteil gibt es auch hier eine zweite Mögliche Lösung. Diese lautet

$$\begin{aligned}
T_{\frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)}G_g &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \right\}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 49:** a) Betrachten Sie das Gravitationspotential

$$U(x) = U(x, y, z) := \frac{mG}{\|x - a\|} = \frac{mG}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2}}$$

eines Punktes  $a \in \mathbb{R}^3$  der Masse  $m > 0$ . Die positive Konstante  $G$  mit dem Wert  $G = (6672 \pm 4)10^{-14} m^3 s^{-2} kg^{-1}$  ist die Gravitationskonstante. Zeigen Sie, dass die Niveauflächen

$$\mathcal{F}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : U(x) = c\}$$

von  $U$  für jedes  $c > 0$  zweidimensionale Flächen sind. Um welche Flächen handelt es sich?

b) Das Gravitationspotential zweier Punkte  $a, b \in \mathbb{R}^3$  ( $a \neq b$ ) der Massen  $m_1 = m_2 = m > 0$  lautet

$$V(x) = V(x, y, z) := \frac{m_1 G}{\|x - a\|} + \frac{m_2 G}{\|x - b\|}$$

Sind die Niveauflächen  $\mathcal{S}_c := \{x \in \mathbb{R}^3 : V(x) = c\}$  von  $V$  wiederum für jedes  $c > 0$  zweidimensionale Flächen?



LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}U(x) = c &\Leftrightarrow \|x - a\| = \frac{mG}{c} =: R \\ &\Leftrightarrow \|x - a\|^2 = R^2\end{aligned}$$

Dies sind Kugeloberflächen vom Radius  $R = \frac{mG}{c} > 0$  und Mittelpunkt  $M = a \in \mathbb{R}^3$ .

Wegen

$$\nabla U(x) = -mG \frac{x - a}{\|x - a\|^3} \text{ für } x \neq a$$

gilt  $\nabla U(x) \neq 0$  für alle  $c > 0$ . Der Satz über implizite Funktionen besagt daher, dass es sich bei  $\mathcal{F}_c$  um eine zweidimensionale Flächen handelt.

*Bemerkung:* Der Satz über implizite Funktionen wäre/ist hier nicht absolut nötig, da man die Auflösungen explizit (s. oben) vornehmen kann und damit auch explizit Tangentialvektoren ausrechnen kann!

b) Zuerst zeigen wir, daß diese Menge nicht leer ist. Da  $m_1 = m_2 = m$  gilt

$$V(x) = mG \left( \frac{1}{\|x - a\|} + \frac{1}{\|x - b\|} \right)$$

und

$$\begin{aligned}V(x) &\rightarrow 0 \text{ für } \|x\| \rightarrow \infty \\ V(x) &\rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow a, b.\end{aligned}$$

Also gibt es für alle  $c > 0$  Punkte  $x \in \mathbb{R}^3$ , die in der Niveaumenge

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid V(x) = c\}$$

liegen. Sei

$$\begin{aligned}g(x) &:= \frac{m_1 G}{\|x - a\|} + \frac{m_2 G}{\|x - b\|} - c \\ &= mG \left( \frac{1}{\|x - a\|} + \frac{1}{\|x - b\|} \right) - c\end{aligned}$$

die Funktion, die die Niveaumenge  $V(x) = c$  als Null-Niveaumenge beschreibt.

$$\nabla g(x) = -mG \left( \frac{(x - a)}{\|x - a\|^3} + \frac{(x - b)}{\|x - b\|^3} \right)$$

Die Niveaumenge ist keine Fläche, falls

$$\begin{aligned}\nabla g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{(x - a)}{\|x - a\|^3} - \frac{(x - b)}{\|x - b\|^3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{a - x}{\|x - a\|^3} &= \frac{x - b}{\|x - b\|^3}\end{aligned}$$

Da zwei Vektoren genau dann gleich sind, wenn sie in Länge und Richtung übereinstimmen, gilt

$$\begin{aligned}\nabla g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow a - x &= x - b \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a + b}{2}\end{aligned}$$

Solche Punkte gehören zu der Niveauflächen  $V(x) = c_0$  wobei

$$c_0 = \frac{mG}{\left\| \frac{b-a}{2} \right\|} + \frac{mG}{\left\| \frac{a-b}{2} \right\|} = \frac{4mG}{\|a - b\|}$$

Somit sind alle Niveaumengen

$$F_c = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid V(x) = c\}$$

mit  $c \neq 0$  Flächen.  $F_{c_0}$  ist hingegen keine Fläche.

Bemerkung:

Aus den Vorüberlegungen zu Beginn dieses Aufgabenteiles, weil  $\nabla g$  nur an einer Stelle Null ist, und weil die Niveaumengen sich nicht schneiden, kann man sagen, dass:

- Für  $c < c_0$  ist die Niveaumenge  $V(x) = c$  eine Hyperfläche in  $\mathbb{R}^3$ , das heißt eine geschlossene 2D Fläche;
- Für  $c = c_0$  hat die Niveaumenge  $V(x) = c$  einen singulären Punkt (Siehe Abbildung 1)
- Für  $c > c_0$  besteht die Niveaumenge  $V(x) = c$  aus zwei Hyperflächen in  $\mathbb{R}^3$ , das heißt zwei geschlossene 2D Flächen.

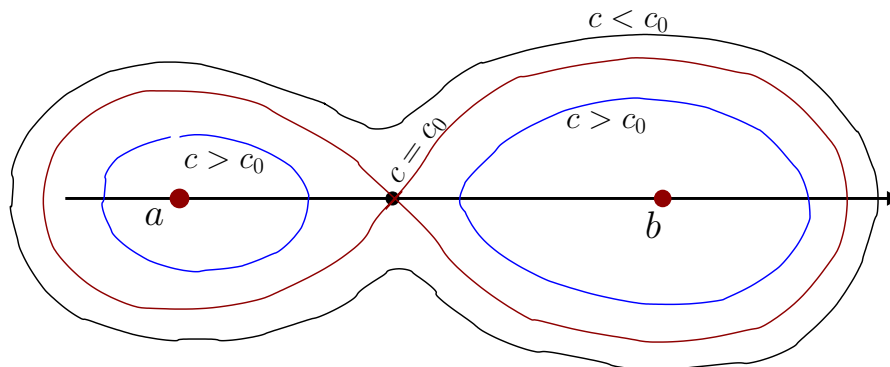


Abbildung 1: Skizze der Niveauflächen in 2D