Aufgabe 50: Bestimmen Sie denjenigen Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ auf dem Rotationshyperboloid $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, der vom Punkt $(1, -1, 0)$ den kleinsten Abstand hat.

Aufgabe 51:

a) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion $f(x, y, z) := x^2y^2z^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

b) Folgern Sie die Ungleichung

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

zwischen dem geometrischen Mittel $\sqrt[3]{abc}$ und dem arithmetischen Mittel $\frac{a+b+c}{3}$, welche für alle nichtnegativen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 52: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$ und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Finden Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema unter Nebenbedingungen $x_Z \in Z$, so dass der Abstand zwischen x_Z und x_0 minimal ist.