

**Aufgabe 50:** Bestimmen Sie denjenigen Punkt  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  auf dem Rotationshyperboloid  $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$ , der vom Punkt  $(1, -1, 0)$  den kleinsten Abstand hat.

LÖSUNG: Minimieren Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 \end{aligned}$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

$f$  ist das Quadrat des Abstandes!

Zur Lösung bilden wir die Lagrangesche Funktion

$$F(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$$

und wenden den Satz über Extrema unter Nebenbedingungen an.

$$\partial_x F =: F_x = f_x - \lambda g_x = 2(x - 1) - 2\lambda x = 0,$$

$$\partial_y F =: F_y = f_y - \lambda g_y = 2(y + 1) - 2\lambda y = 0,$$

$$\partial_z F =: F_z = f_z - \lambda g_z = 2z + 2\lambda z = 0,$$

$$\partial_\lambda F = F_\lambda = -g = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2z(1 + \lambda) = 0 \\ 2y(1 - \lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow y(1 - \lambda) = -1 \\ 2x(1 - \lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - \lambda) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda = -\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -y} \quad (\lambda \neq 1!)$$

und  $(\boxed{z = 0}$  oder  $\boxed{\lambda = -1})$ .

Fall 1:  $x = -y$  und  $z = 0$ :

$$\Rightarrow 1 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2(2 - \sqrt{2})^2}{4} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2} \\ &= (\sqrt{2} - 1)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 \\ &= \frac{2(2 + \sqrt{2})^2}{4} = (1 + \sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Fall 2:  $\lambda = -1 \Rightarrow 1 - \lambda = 2$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}, \\ 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}. \end{cases} \\ \Rightarrow 0 = g\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, z\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - z^2 - 1 \\ \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \quad \text{keine Lösung!} \end{aligned}$$

Der minimale Wert ist also:  $(\sqrt{2} - 1)^2 = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ .

Beachte: Die Funktion  $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2$  ist stetig und für jedes feste  $z_0 \in \mathbb{R}$  ist  $M_{z_0} = \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z_0^2\}$  ein(e) Kreis(linie) mit Mittelpunkt  $M = (0, 0, z_0)$  und Radius  $R = \sqrt{1 + z_0^2}$ , also abgeschlossen und beschränkt. Daher besitzt  $f$  in  $M_{z_0}$  sowohl Minimum als auch Maximum.

*Bemerkung:* Am obigen Gleichungssystem erkennt man, dass der Verbindungsvektor  $(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$  parallel zu  $\text{grad } g(x, y, z)$  liegt.

**Aufgabe 51:** a) Bestimmen Sie das Maximum der Funktion  $f(x, y, z) := x^2 y^2 z^2$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

b) Folgern Sie die Ungleichung

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}$$

zwischen dem geometrischen Mittel  $\sqrt[3]{abc}$  und dem arithmetischen Mittel  $\frac{a+b+c}{3}$ , welche für alle nichtnegativen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  gilt.

LÖSUNG:

a) Auf der Kugeloberfläche  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  nimmt die Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$$

einen größten Wert an, da  $f$  stetig ist und die Kugeloberfläche beschränkt und abgeschlossen ist.

Nach dem Satz über Extrema unter Nebenbedingungen bilden wir:

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 y^2 z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

und erhalten durch Ableiten:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \partial_x F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_y F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_z F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_\lambda F(x, y, z, \lambda) = 0 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2xy^2z^2 - 2\lambda x = 0 \\ 2x^2yz^2 - 2\lambda y = 0 \\ 2x^2y^2z - 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x(y^2z^2 - \lambda) = 0 \\ 2y(x^2z^2 - \lambda) = 0 \\ 2z(x^2y^2 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Die Lösungen mit  $x = y = z = 0$  können wir ausschließen, da  $f(0, 0, 0) = 0$  offenbar der kleinste Wert von  $f$  überhaupt ist und  $(0, 0, 0)$  nicht auf der Kugeloberfläche liegt. Die anderen (möglichen) Lösungen ergeben:

$$\begin{aligned} \lambda &= y^2 z^2 = x^2 z^2 = x^2 y^2 \\ \Rightarrow x^2 &= y^2 = z^2 \text{ und } \lambda = x^4 = y^4 = z^4. \\ \Rightarrow x^2 &= y^2 = z^2 = \frac{1}{3}, \quad \text{wegen der Nebenbedingung } x^2 + y^2 + z^2 = 1. \\ \Rightarrow \lambda &= x^4 = \frac{1}{9} \text{ und} \\ x &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}. \\ \Rightarrow f &\left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} > 0. \end{aligned}$$

Dies liefert den maximalen Wert von  $f$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , da  $f$  seinen größten Wert auf der Kugel annimmt und in allen in Frage kommenden Punkten denselben Wert – nämlich  $\frac{1}{27}$  – hat.

- b) Aus dem vorherigen Aufgabenteil wissen wir, dass für Punkte auf der Kugeloberfläche der Einheitskugel gilt

$$f(x, y, z) \leq \frac{1}{27} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 y^2 z^2 \leq \frac{1}{27}.$$

Daraus folgt

$$\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

für alle  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  mit  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Setze nun

$$x^2 = \frac{a}{a+b+c} \geq 0, \quad y^2 = \frac{b}{a+b+c} \geq 0, \quad z^2 = \frac{c}{a+b+c} \geq 0,$$

dann folgt daraus

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a + b + c}{a + b + c} = 1.$$

Die so gewählten  $x, y$  und  $z$  erfüllen also unsere Nebenbedingung. Somit können wir sie einsetzen in

$$\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \leq \frac{1}{3}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b+c)^3}} &\leq \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} &\leq \frac{a+b+c}{3} \end{aligned}$$

für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a, b, c \geq 0$  und  $a + b + c > 0$ .

**Aufgabe 52:** Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  und

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Finden Sie mit Hilfe des Satzes über Extrema unter Nebenbedingungen  $x_Z \in Z$ , so dass der Abstand zwischen  $x_Z$  und  $x_0$  minimal ist.

LÖSUNG: Wir müssen die Funktion

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

minimieren. Dazu bilden wir die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} f(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \\ &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_y F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_z F(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \partial_\lambda F(x, y, z, \lambda) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(x - x_0) - 2\lambda x = 0 \\ 2(y - y_0) - 2\lambda y = 0 \\ 2(z - z_0) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Daraus folgt  $z = z_0$ ,

$$x = \frac{x_0}{1 - \lambda} \quad \text{und} \quad y = \frac{y_0}{1 - \lambda}.$$

Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{(1 - \lambda)^2} + \frac{y_0^2}{(1 - \lambda)^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 &= (1 - \lambda)^2 \\ \Leftrightarrow \lambda &= 1 \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{aligned}$$

und damit können wir nun  $x$  und  $y$  ausrechnen:

$$x = \frac{x_0}{1 - \lambda} = \frac{x_0}{\mp \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$
$$y = \frac{y_0}{1 - \lambda} = \frac{y_0}{\mp \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$$

$$f\left(\frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, z_0\right) = \frac{x_0^2(1 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{y_0^2(1 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2}{x_0^2 + y_0^2}$$
$$= \left(1 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)^2$$

$$f\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}, z_0\right) = \frac{x_0^2(1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2}{x_0^2 + y_0^2} + \frac{y_0^2(1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2})^2}{x_0^2 + y_0^2}$$
$$= \left(1 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x_Z = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ z_0 \end{pmatrix}$$