Klausur Mathematik III für Physiker (math340)

Wintersemester 2012/13, Vorlesung Dr. Tino Ullrich

NAME: VORNAME: GEB.-DATUM:
STUDIENFACH: MAT.-NUMMER:

PUNKTE: **NOTE:**

$\boxed{\textbf{Aufgabe 1}}$ **(5 Punkte)** Sei $u(x,t)$ die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe ($a > 0$)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= 0\,, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0\,; \\ u(x,0) &= 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sin(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Um was für einen Typ Differentialgleichung handelt es sich? Wie nennt man diese? Berechnen Sie $u(x,t)$ und $\max\limits_{x\in\mathbb{R},\, t\geq 0} |u(x,t)|$!

$\boxed{\textbf{Aufgabe 2}}$ **(8 Punkte)** Berechnen Sie die Fourierreihe der Funktion $f(x) = 1 - |x|$ bezüglich des Intervalls $[-1, 1]$. Entwickeln Sie f nun in eine reine Sinusreihe bzgl. des Intervalls $[0, 1]$. Wo konvergieren beide Reihen und welchen Wert haben sie? Erklären Sie das unterschiedliche Abklingverhalten der Fourierkoeffizienten!

$\boxed{\textbf{Aufgabe 3}}$ **(6 Punkte)** Lösen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes das folgende Rand-Anfangswertproblem auf $[0, 1] \times (0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,, \quad x \in (0,1),\ t > 0\,; \\ u(x,0) &= 0\,, \quad x \in (0,1)\,; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 1 - |x|\,, \quad x \in (0,1)\,; \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0\,, \quad t > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

(Hinweis: Nutzen Sie die Fourierreihe aus Aufgabe 2.) Welcher physikalische Vorgang wird durch (1) modelliert? Eine Probe wird nicht verlangt.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 **(5 Punkte)** Wie lautet die Poissonsche Formel (Poissonscher Satz) für die Lösung des Dirichlet-Problems zur Laplace-Gleichung in der Kugel $K_R(0) \subset \mathbb{R}^3$

$$\Delta u(x,y,z) = 0 \quad , \quad x^2+y^2+z^2 < R^2\,;$$
$$u(x,y,z) = \varphi(x,y,z) \quad , \quad x^2+y^2+z^2 = R^2\,?$$

Sei jetzt $\varphi(x,y,z) := \min\{x,y,z\} - \max\{x,y,z\}$. Weisen Sie nach, dass die Lösung des zugehörigen Dirichlet-Problems im Innern der Kugel strikt negativ ist!

Aufgabe 5 **(4 Punkte)** Sei $v(x,y,z)$ eine in der Kugel $K_R(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < R^2\}$ harmonische Funktion, die auf dem Rand von $K_R(0)$ die Werte

$$v(x,y,z) = \left(\frac{z}{R}\right)^2 \quad , \quad x^2+y^2+z^2 = R^2\,,$$

annimmt. Berechnen Sie den Funktionswert $v(0,0,0)$!

Aufgabe 6 **(4 Punkte)** Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z+1}$ um $z_0 = -i$ in eine solche Laurent-Reihe, dass $z = 2$ im Konvergenzgebiet liegt!

Aufgabe 7 **(3 Punkte)** Ermitteln Sie den Wert des komplexen Wegintegrals

$$\int\limits_{|\xi+2|=1} \frac{e^{-\xi}}{(\xi+2)^3}\,d\xi\,,$$

wobei der Kreisrand im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

Aufgabe 8 **(10 Punkte)** Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$ in eine Taylorreihe um $z_0 = 0$. Bestimmen Sie den Konvergenzradius! Ermitteln sie außerdem Typ und Lage der Singularitäten und berechnen Sie die entsprechenden Residuen!

Aufgabe 9 **(4 Punkte)** Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\int\limits_{\gamma} z \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz,$$

wobei γ die (positiv zu umlaufende) Ellipse $\{z = x+iy : x^2/3 + y^2/5 = 1\}$ in der komplexen Ebene darstellt.

Aufgabe 10 **(5 Punkte)** Berechnen Sie das reelle Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$$

mittels komplexer Funktionentheorie!

Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden! **Viel Erfolg!**