

Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1. Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(a) $y' = e^{2x-y}$, (2 Punkte)

(b) $p^2(1 + y'x^2) - y = 2p^4y'$, $p \neq 0$

(c) $y'' + 4y = x^2 + 5 \cos(2x)$, (2 Punkte)

Aufgabe 1.2. Der Laplace-Operator Δ im \mathbb{R}^3 (analog im \mathbb{R}^n , insbesondere im \mathbb{R}^2) ist gegeben durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

(a) Die zweimal stetig differenzierbare Funktion $u(x, y)$ sei in Polarkoordinaten gegeben, d.h. $U(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Bestätigen Sie die Formel

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \quad (4 \text{ Punkte})$$

(b) Die zweimal stetig differenzierbare Funktion $v(x, y, z)$ sei in Kugelkoordinaten gegeben, d.h. $V(r, \varphi, \theta) = v(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$. **Nutzen Sie (a)** und bestätigen Sie die Formel

$$\Delta v = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Aufgabe 1.3. **(a)** Gegeben sei die Funktion $r(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Zeigen Sie, dass $f = 1/r$ eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ im \mathbb{R}^3 ist. (2 Punkte)

(b) Sei u eine Lösung der Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion

$$v(x, y, z) = \frac{1}{r} u\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right)$$

die Gleichung $\Delta v = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ erfüllt. Gilt ein analoges Resultat auch im \mathbb{R}^2 ?

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 1.2/(b)!

Abgabe der schriftlichen Lösungen in den Tutorien der Woche vom 15.-19.10.