Dr. T. Ullrich
Dipl.-Math. S. Mayer INS Uni Bonn

Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1. Die Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion f ist formal gegeben durch

$$S[f](x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) + a_n \cos(nx),$$

mit $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)$ und $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)$. Berechnen Sie die Fourier-Reihe der folgenden Funktionen (2π-periodisch fortgesetzt) **(2+2 Punkte)**

$\boxed{\textbf{(a)}}$ $f(x) = x$, $\boxed{\textbf{(b)}}$ $f(x) = |x|$, **(c)** $f(x) = |\sin(x)|$

Aufgabe 2.2. $\boxed{\textbf{(a)}}$ Zeigen Sie unter Benutzung von 1.1/(b), dass gilt **(2 Punkte)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie (1) unter Benutzung der Parsevalschen Gleichung (Hinweis 1.1/(a)).

$\boxed{\textbf{Aufgabe 2.3.}}$ **(4 Punkte)** Sei $a > 0$ vorgegeben. Berechnen Sie die Fourier-Reihe der geraden sowie der ungeraden $2a$-periodischen Fortsetzung von $f(x) = x(x-a)$, $0 \le x \le a$. Vergleichen Sie in beiden Situationen das asymptotische Abklingverhalten der Fourier-Koeffizienten a_n, b_n. Was beobachten Sie und was scheint der Grund dafür zu sein?

Aufgabe 2.4. (a) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x\cos(\pi/x) & : \quad x \neq 0\,, \\ 0 & : \quad x = 0\,, \end{cases}$$

zwar überall stetig ist, aber nicht von beschränkter Variation (zumindest auf jedem Intervall, das die 0 enthält).

(b) Was können Sie über die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihe $S[f_\pi]$ aussagen? (Hinweis: Es steht nicht da, dass Sie die Fourier-Reihe berechnen sollen).

Aufgabe 2.5. Die Fouriertransformierte $\hat{f}$ einer integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi}\, dx.$$

$\boxed{\textbf{(a)}}$ Berechnen Sie $\widehat{\mathcal{N}_1}$ für

$$\mathcal{N}_1(x) = \begin{cases} 1 & : \quad |x| \leq \frac{1}{2}\,, \\ 0 & : \quad |x| > \frac{1}{2}\,. \end{cases} \qquad \textbf{(2 Punkte)}$$

$\boxed{\textbf{(b)}}$ Die Faltung $h = f * g$ zweier integrierbarer Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\, dt.$$

Berechnen Sie $\mathcal{N}_2 := \mathcal{N}_1 * \mathcal{N}_1$ und die Fouriertransformierte $\widehat{\mathcal{N}_2}$ **(3 Punkte)**. Was fällt auf?

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 24.10.2012