Dr. T. Ullrich
Dipl.-Math. S. Mayer INS Uni Bonn

Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1. **(2 Punkte)** Beweisen Sie die Orthogonalitätsrelationen für $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} \pi & : \quad m = n\,, \\ 0 & : \quad m \neq n\,, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} \pi & : \quad m = n\,, \\ 0 & : \quad m \neq n\,, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0\,.$$

Aufgabe 3.2. Lösen Sie die AWA (1) für die Wellengleichung auf der Halbgeraden ($x > 0$) unter geeigneten Voraussetzungen an u_0 und u_1.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0\,, \quad x > 0\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \quad x > 0\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= u_1(x)\,, \quad x > 0\,, \\ u(0,t) &= 0\,, \quad t > 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Hinweis: Setzen Sie alle beteiligten Funktionen ungerade fort!

Aufgabe 3.3. **(a)** Duhamelsches Prinzip: Seien f und $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R} \times [0, \infty]$. Dann ist die Funktion

$$u(x,t) = \frac{a}{2}\int_0^t \Big(\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(y,s)\,dy \Big) ds$$

eine Lösung der inhomogenen Wellengleichung mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

$\boxed{\text{(b)}}$ **(6 Punkte)** Lösen Sie die folgenden Cauchy-Probleme für die eindimensionale Wellengleichung ($x \in \mathbb{R}, t > 0$).

(i)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(\omega x) \quad , \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,.$$

(ii)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(x) \quad , \quad u(x,0) = \sin(x)\,, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,.$$

(iii)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin(t) \quad , \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1\,.$$

Aufgabe 3.4. Lösen Sie die folgenden RAWAS für die eindimensionale Wellengleichung.

$\boxed{\text{(a)}}$ **(2 Punkte)**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) = 0\,,\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(2\pi x) \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\,. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{(b)}}$ **(4 Punkte)**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(t)\,, \quad x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Ansatz: $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin(kx)$.

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 31.10.2012