Dr. T. Ullrich
Dipl.-Math. S. Mayer INS Uni Bonn

Mathematatik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1. **(8 Punkte)** Sei $c > 0$ vorgeben. Lösen Sie die folgende RAWA mittels Separationsansatz.

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) = 0,$$
$$0 < x < a,\ 0 < y < b,\ t > 0,$$

unter den Anfangsbedingungen

$$u(x,y,0) = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,$$
$$u_t(x,y,0) = x(x-a)y(y-b),\ 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

und Randbedingung

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,\ t > 0\,.$$

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Ansatz $u(x,y,t) = v(x,y)w(t)$. Anschließend trennt man auch noch x und y durch einen zweiten Ansatz $v(x,y) = G(x)H(y)$.

Aufgabe 4.2. Man zeige, dass alle Lösungen $u(x,t) = v(r,t)$ mit $r = |x|$ der homogenen Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

$$-\Delta u + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

die Form $u(x,t) = 1/rF(r+at) + 1/rG(r-at)$ haben, wobei F, G beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind.
Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten (siehe Übungsblatt 1).

Aufgabe 4.3. **(2 Punkte)** Es sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$. Für welche $a \in \mathbb{R}^3$ sind $u(x,t) = \varphi(a \cdot x - ct)$ und $\varphi(a \cdot x + ct)$ Lösungen der homogenen Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$

$$-\Delta u + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,?$$

Aufgabe 4.4. **(4+4 Punkte)** Man löse die Cauchy-Probleme für die homogene Wellengleichung $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ im $\mathbb{R}^2$ für die Anfangsbedingungen

a) $u(x,0) = e^{x_1}\cos(x_2)$, $u_t(x,0) = x_1^2 - x_2^2$,

b) $u(x,0) = x_1^2 + x_2^2$, $u_t(x,0) = 1$.

Hinweis: Man verwende den Ansatz $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}[\frac{t^{2k}}{(2k)!}\Delta^k u(x,0) + \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\Delta^k u_t(x,0)]$.

Aufgabe 4.5. Die AWA der Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$. Weisen Sie nach, dass unter den Voraussetzungen $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ bzw. $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ die Funktion

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{|y|<1}\frac{u_0(x+aty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy\right) + \frac{t}{2\pi}\int_{|y|<1}\frac{u_1(x+aty)}{\sqrt{1-|y|^2}}dy,\ x \in \mathbb{R}^2, t > 0,$$

nachfolgende Anfangswertaufgabe löst:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0,\ x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) &= u_1(x),\ x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie die Gültigkeit des Huygenschen Prinzips.

Hinweis: Setzen Sie die Funktionen u_0, u_1 konstant in den $\mathbb{R}^3$ fort und benutzen Sie die Lösungsformel für den dreidimensionalen Fall.

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 07.11.2012