Dr. T. Ullrich
Dipl.-Math. S. Mayer INS Uni Bonn

# Mathematik III für Physiker

*Wintersemester 2012/13*

## Übungsblatt 5

**Aufgabe 5.1.** **(4 Punkte)** Lösen Sie die Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung auf der reellen Achse

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

unter der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = e^{-x^2}.$$

**Aufgabe 5.2.**

**a)** Zu gegebener Funktion $f$ auf $\mathbb{R}^n \times [0,\infty)$ und für $s \geq 0$ erfülle $v_s$ die homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}(x,t) = \Delta v_s(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq s$$
$$v_s(x,s) = f(x,s).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = \int_0^t v_s(x,t)ds$$

die inhomogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)\,, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0,$$

mit der homogenen Anfangsbedingung $u(x,0) = 0$ erfüllt.

**b)** Mit welcher Formel berechnet sich die Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ mit inhomogener Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$?

**Aufgabe 5.3.** **(5 Punkte)** Lösen Sie die folgende Randanfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung auf dem Intervall $[0,1]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$
$$u(x,0) = x^2 - 1\,.$$

Hinweis: Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$.

**Aufgabe 5.4.** **(6 Punkte)** Man löse folgende Probleme für die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

**a) (2 Punkte)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 0,\ t > 0$$
$$u(x,0) = g(x),\ 0 < x < \infty.$$

Hinweis: Setzen Sie $g$ geeignet auf $\mathbb{R}$ fort.

**b) (2 Punkte)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0,\ t > 0$$
$$u(x,0) = g(x),\ 0 < x < \infty.$$

Hinweis: Setzen Sie $g$ geeignett in $\mathbb{R}$ fort.

**c) (2 Punkte)**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$$
$$u(0,t) = 0,\ t > 0$$
$$u(x,0) = g(x),\ 0 < x < \infty.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $u(x,t) = e^{-t}v(x,t)$.

**Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 14.11.2012**