Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1. **(3 Punkte)** Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \cos(k\varphi) = \frac{1 - r\cos\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}$$

wobei $0 < r < 1$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Rechnen Sie komplex!

Aufgabe 6.2. **(3 Punkte)** Sei u eine in der offenen Kreisscheibe $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$ harmonische Funktion, welche auf dem Rand des Kreises die Werte

$$u(x, y) = \frac{3}{2}y + 1$$

annimmt. Berechnen Sie das Maximum aller Funktionswerte von u auf der Kreisscheibe und den Funktionswert von u im Koordinatenursprung.

Aufgabe 6.3. Das Dirichlet-Problem für den Kreis zur Laplace Gleichung. Sei f eine auf dem Rand des Einheitskreises vorgegebene stetige Funktion.

(i) Lösen Sie die allgemeine Randwertaufgabe mittels Separationsansatz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{auf } x^2 + y^2 < 1$$

unter der Randbedingung $u(x, y) = f(x, y)$ für $x^2 + y^2 = 1$.
Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung des zweidimensionalen Laplace-Operators in Polarkoordinaten. Ein Separationsansatz führt auf eine Eulersche Differentialgleichung in r (siehe etwa Meyberg/Vachenauer: Höhere Mathematik 2 oder Heuser: Gewöhnliche DGLn). Diese löst man nun mit Hilfe der Substitution $t = \ln r$.

(ii) Überführen Sie die Formel für die Lösung in die Form $v(r, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) G(r, \varphi, t) dt$ mit geeignet gewählter Funktion G.

$\boxed{\textbf{Aufgabe 6.4.}}$ **(6 Punkte)** Berechnen Sie eine Lösung des folgenden Problems:

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, & 1 < \sqrt{x^2+y^2} &< 3, \\ u(x,y) &= 3, & \sqrt{x^2+y^2} &= 1, \\ u(x,y) &= 3+x, & \sqrt{x^2+y^2} &= 3. \end{aligned}$$

Hinweis: Transformieren Sie das Problem in Polarkoordinaten und machen Sie einen Separationsansatz. Vgl. Aufgabe 6.3.

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 21.11.2012