Mathematik III für Physiker

Wintersemester 2012/13

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1. (Äußeres Dirichlet-Problem)

(a) **(6 Punkte)** Lösen Sie das äußere Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| > 1\}\,, \\ u(x) &= g(x) && \text{für } \|x\| = 1\,, \\ \lim_{\|x\|\to\infty} u(x) &= 0 \end{aligned}$$

mit einer vorgegebenen stetigen Funktion g. Stellen Sie die Lösung dar in der Form

$$u(x) = \int_{\|y\|=1} g(y)H(x,y)do_y$$

mit einer geeigneten Funktion $H(x,y)$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an Aufgabe 1.3 (b).

(b) Zeigen Sie, dass dann

$$\sup_{\|x\|>1} |u(x)| = \max_{\|x\|=1} |g(x)|$$

gelten muss. Gilt ein analoges Resultat auch für $\sup_{\|x\|>1} u(x)$?

Aufgabe 7.2. **(6 Punkte)** Berechnen Sie mittels Separationsansatz eine Lösung $u(x,y)$ der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta u(x,y) = 0, \qquad 0 < x, y < \pi,$$

welche zusätzlich folgende Randbedingungen erfüllt ($0 \le x, y \le \pi$):

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sin x, & u(0,y) &= \sin^3 y \\ u(x,\pi) &= 0, & u(\pi,y) &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 7.3. **(8 Punkte)** Lösen Sie die Randwertaufgaben

(a)

$$
\begin{aligned}
-\Delta u(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}, & x^2+y^2+z^2 &< R^2\\
u(x,y,z) &= \pi R^3, & x^2+y^2+z^2 &= R^2
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\Delta u(x,y,z) &= 1, & 1 < x^2+y^2+z^2 &< 4\\
u(x,y,z) &= 0, & x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ oder } x^2+y^2+z^2 &= 4
\end{aligned}
$$

Hinweis: Verwenden Sie die Rotationssymmetrie!

Aufgabe 7.4. Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen der Eigenwertgleichung im $\mathbb{R}^3$

$$\Delta u = k^2 u$$

für $k \neq 0$.

Aufgabe 7.5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und stetige Funktion. Wir definieren die Funktion $u(x^0, y^0, z^0)$ auf $\mathbb{R}^3_+$ wie folgt

$$u(x^0,y^0,z^0) = \frac{z_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{\left[(x-x^0)^2 + (y-y^0)^2 + z_0^2\right]^{3/2}}\, dxdy\,.$$

Zeigen Sie $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x^0,y^0,0)} u(x,y,z) = f(x^0,y^0)$.

Hinweis: Orientieren Sie sich am entsprechenden Beweis für die Wärmeleitungsgleichung (nutzen Sie die Stetigkeit von f) bzw am Satz 13 aus der Vorlesung. Zeigen Sie zunächst, dass das Integral ohne $f(x,y)$ im Integranden gleich 1 ist.

Abgabe der schriftlichen Lösungen in der Vorlesung am 28.11.2012